

Тақырып: Евклид кеңістігі. Унитар кеңістігі. Коши -Буняковский теңсіздігі. Скаляр көбейтіндінің үзіліссіздігі. Евклид кеңістігінің сипаттауыш қасиеті.

Ақырлы өлшемді E_n нақты (комплекс) векторлық Евклид кеңістігінде векторларды қосу және векторды санға көбейту амалдарымен қатар векторлардың скалярлық (немесе ішкі) көбейтіндісі анықталған. Анализде функциялардың скалярлық көбейтіндісі кеңінен қолданылады.

Абстракт жағдайда унитар кеңістік түсінігін мына анықтама бойынша қабылдауға болады.

Анықтама. X векторлық кеңістігінің кез келген x пен y элементтеріне сандар өрісінен, (x, y) арқылы белгіленетін, комплекс сан сәйкес қойылып, бұл сәйкестіктің мынадай

$$\begin{aligned} \forall c \in C, \forall x, y \in X, \quad (cx, y) &= c(x, y); \\ \forall x, y, z \in X, \quad (x + y, z) &= (x, z) + (y, z); \\ (x, y) &= \overline{(y, x)}, \forall x, y \in X; \\ \forall x \in X, \quad x \neq \theta, \quad (x, x) &> 0 \end{aligned}$$

қасиеттері бар болса, онда оны x пен y элементтерінің скалярлық көбейтіндісі деп атайды.

Аталған қасиеттерден мынадай салдарды алуға болады: 2) мен 3)-ті пайдаланып,

$$(x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)} = (x, y) + (x, z)$$

теңдігін алсақ, онда, 1) мен 3)-тен

$$(x, cy) = \overline{(cy, x)} = \overline{c(y, x)} = \bar{c}(x, y)$$

теңдігі шығады.

Егер 2)-де $x = y = \theta$ болса, онда $\forall z \in X$ үшін $(\theta, z) = 0$. Дербес жағдайда $(\theta, \theta) = 0$.

Комплексті Евклид кеңістігіндегі (унитар кеңістік) өзіне түйіндес оператордың өзіндік мәндері нақты болады.

$$\begin{aligned} (x, y) &= \overline{y, x} \\ (x, \lambda y) &= \bar{\lambda}(x, y) \\ (x, \lambda y) &= \overline{(\lambda y, x)} = \bar{\lambda}(y, x). \end{aligned}$$

Демек,

$$(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y)$$

Унитар кеңістік нормаланған кеңістік. Әр $x \in X$ элементіне оның нормасы ретінде $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ өрнегімен анықталған санды сәйкес қоюға болады. Бұл жағдайда $\|x\| > 0$ және $\|x\| = 0$ болғанда және тек сонда ғана $x = \theta$.

R және R^* Евклид кеңістігі изоморфты деп аталады, егер олардың элементтерінің арасына бірмәнді сәйкестік орнатуға болса

$$\begin{aligned} x &\leftrightarrow x^*, \quad y \leftrightarrow y^*, \\ x, y &\in R; \quad x^* + y^* \in R^*, \end{aligned}$$

онда

$$\begin{aligned} x + y &\leftrightarrow x^* + y^*, \\ \alpha x &\leftrightarrow \alpha x^* \end{aligned}$$

және

$$(x, y) = (x^*, y^*).$$

Керісінше айтқанда, Евклид кеңістігінің изоморфтығы – осы кеңістікте анықталған сызықтық операциялар мен скаляр көбейтіндісінің өзара бірмәнді сәйкестігі.

Кез келген n -өлшемді Евклид кеңістігі өзара изоморфты, демек әрбір осындай кеңістік R^n арифметикалық кеңістігіне изоморфты. Ақырсыз өлшемді Евклид кеңістігі өзара изоморфты болмауы мүмкін. Мысалы l_2 және $C_2[a, b]$ кеңістігі өзара изоморфты. Ал мысалы олардың біріншісі толық, ал екіншісі толық емес.