

Тақырып: Нормаланған кеңістік. Эквивалент нормалары. Банах кеңістігі. Нормаланған кеңістіктің ішкі кеңістігі. Лебег кеңістігі. Гельдер, Минковский интегралдық теңсіздіктері.

Анықтама. X жиыны сызықтық нормаланған кеңістік деп аталады, егер:

X –сызықтық кеңістік болсын.

X сызықтық кеңістігінің әрбір x элементіне осы элементтің нормасы деп аталатын және $\|x\|$ деп белгіленетін нақты саны сәйкес қойылып, норманың элементі келесі шарттарды (норманың аксиомалары) қанағаттандырса

$$\begin{aligned}\|x\| &\geq 0, \|x\| = 0 \text{ егер } x = 0, \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \cdot \|x\|, \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

функционалын айтамыз.

Теріс емес $\|x\|$ нақты санды x элементінің (векторының) ұзындығы деп қарастыруға болады. Ұзындығы бірге тең x векторын нормаланған вектор деп атайды.

Сызықтық метрикалық кеңістіктің ең негізгі класы Банах кеңістігі немесе B типті кеңістік болып табылды.

Кез келген нормаланған кеңістік метрикалық кеңістік болып табылады, егер оған қашықтық енгізсек $\rho(x, y) = \|x - y\|$

Метрикалық кеңістіктің аксиомасының дұрыстығы 1)–3) норманың қасиеттерінен келіп шығады.

Егер норма бойынша анықталған метрикуаны пайдалансақ, онда тізбектің шегі және оның жинақталуы мынадай:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

немесе $n \rightarrow \infty, x_n \rightarrow x$. Осыған байланысты нормаланған кеңістіктегі жинақталуды норма бойынша жинақталу деп атайды. Егер сызықтық нормаланған кеңістік норма бойынша жинақталса Банах кеңістігі деп аталады.

Метрикалық кеңістіктегідей нормаланған кеңістікте де бірнеше норма анықталуы мүмкін, бұл жағдайда оларды $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \dots$ арқылы белгілейді.

Норманың мына қасиеттерін $\| -x \| = \|x\|, \| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ атап өтейік: бұларды дәлелдеу қиын емес.

Нормаланған X кеңістігіндегі шар (тұйық шар)

$$\begin{aligned}S(x_0, r) &= \{x; x \in X, \|x - x_0\| < r\}, \\ \bar{S}(x_0, r) &= \{x; x \in X, \|x - x_0\| \leq r\}\end{aligned}$$

жиындары арқылы анықталады. Бұдан нормаланған кеңістікте метрикалық кеңістіктегі барлық түсініктердің орындалатыны келіп шығады.

Егер $x, y \in L_0$ болса, онда $\alpha x + \beta y \in L_0$ қасиетімен берілген L сызықтық кеңістігінің ішкі кеңістігін L_0 бос жиыны түрінде анықтадық. Нормаланған кеңістігінің ең негізгі бөлімі тұйықталған сызықтық кеңістік болып табылады, яғни өзінің барлық шекті нүктелерін қамтитын ішкі кеңістік. Ақырлы нормаланған кеңістіктің кез келген ішкі кеңістігі автоматты түрде тұйықталған болады. Ақырсыз өлшемді жағдайда орындалмайды. Мысалы, (4) нормамен берілген $C[a, b]$ үзіліссіз функциялар кеңістігіндегі көпмүшелер ішкі кеңістікті құрады, бірақ тұйықталмаған.

Сонымен қоса тағы бір мысал қарастырайық: нөлден өзге ақырлы сан мүшелерін тұратын m шенелген тізбектер кеңістігінің тізбектері ішкі кеңістікті құрады. Алайда, ол (5) норма бойынша тұйықталмаған, оның тұйықтаушысында, мысалы,

$$\left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$$

тізбектері қамтылады.

Анықтама. Векторлық нормаланған X кеңістігінде $\|\cdot\|_1$ және $\|\cdot\|_2$ нормалары берілсін. Егер X -тегі $\|\cdot\|_1$ норма бойынша жинақталатын кез келген тізбек $\|\cdot\|_2$ норма бойынша да

жинақталатын, және керісінше де, болса, онда $\|\cdot\|_1$ және $\|\cdot\|_2$ нормаларын өзара эквивалентті нормалар деп атайды.

Теорема 1. Векторлық кеңістіктегі $\|\cdot\|_1$ және $\|\cdot\|_2$ нормалары үшін $\kappa_1 \kappa_2 > 0$ сандары табылып,

$$\|x\|_2 \leq \kappa_1 \|x\|_1$$

$$\|x\|_1 \leq \kappa_2 \|x\|_2$$

теңсіздіктері орындалғанда және тек сонда ғана олар өзара эквивалентті

Теорема 2. Ақырлы өлшемді векторлық кеңістікте кез келген екі норма өзара эквивалентті. Ондағы қарастырылып отырған норма бойынша тек жалғыз ғана ашық жиындар, тұйық жиындар т.т. жүйелері бар болады.

Егер

$$y_m = \frac{x_m}{\|x_m\|_2} = (\eta_1^{(m)}, \eta_2^{(m)}, \dots, \eta_n^{(m)})$$

деп белгілесек, онда

$$\|y_m\|_2^2 = \sum_{k=1}^n (\eta_k^{(m)})^2 = 1 \quad (7)$$

болады. Сондықтан $\forall k, m$ үшін $|\eta_k^{(m)}| \leq 1$.

Евклид кеңістігіндегі шар жинақы болатынын $\{y_m\}$ тізбегінен жинақталатын тізбекше бөліп алуға болады. Жаңадан белгілеулер енгізбеу үшін сол $\{y_m\} = \{\eta_k^{(m)}\}$ тізбегінің өзі кейбір $y = \eta_1, \dots, \eta_n$ векторына жинақталады деп есептейміз. Бұл жағдайда

$$\eta_k = \lim_{m \rightarrow \infty} \eta_k^{(m)} \\ (k = 1, 2, \dots, n)$$

(7) теңдікте шекке көшсек, онда $\|y\|_2^2 = \sum_{k=1}^n \eta_k^2 = 1$

шығады да $y \neq 0$. Бірақ (6) теңсіздік бойынша $m \rightarrow \infty$ $\|y - y_m\|_1 \leq c_1$ $\|y - y_m\|_1 \rightarrow 0$ болады. Ал екінші жағынан $m \rightarrow \infty$

$$\|y_m\| = \frac{\|x_m\|_1}{\|x_m\|_2} < \frac{1}{m} \rightarrow 0$$

болады да $m \rightarrow \infty$ $y_m \rightarrow 0$. Шыққан қайшылық теореманы дәлелдейді.

Салдар. Ақырлы өлшемді кеңістікте кез келген норма бойынша жинақталу координаттар бойынша жинақталумен пара-пар.

Сызықтық метрикалық кеңістіктің ең негізгі класы Банах кеңістігі немесе B типті кеңістік болып табылды.

Кез келген нормаланған кеңістік метрикалық кеңістік болып табылады, егер оған қашықтық енгізсек

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

Метрикалық кеңістіктің аксиомасының дұрыстығы 1)–3) норманың қасиеттерінен келіп шығады.

Егер норма бойынша анықталған метриkanı пайдалансақ, онда тізбектің шегі және оның жинақталуы мынадай:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

немесе $n \rightarrow \infty$, $x_n \rightarrow x$.

Осыған байланысты нормаланған кеңістіктегі жинақталуды норма бойынша жинақталу деп атайды.

Егер сызықтық нормаланған кеңістік норма бойынша жинақталса Банах кеңістігі деп аталады.