

Тақырып: Метрикалық кеңістіктегі компакт жиындар. Метрикалық кеңістіктің компакттік критеріі. Арцел теоремасы.

Анықтама. Егер M жиынының әрбір ақырсыз ішкі жиынынан осы жиындағы кейбір нүктеге жинақталатын тізбекті бөліп алуға болса, онда X метрикалық кеңістігінің M жиынын *компакты* деп атаймыз.

Компактіліктің анықтамасы мен жоғарыда көрсетілген факт бойынша, метрикалық кеңістіктегі жинақталатын тізбектің кез келген ішкі тізбегі сол шекке жинақталады, демек, компактты жиын тұйықталған. Компакты жиынның тұйықталған ішкі жиыны компактты болатыны анық.

Анықтама. X метрикалық кеңістігіндегі M жиыны *салыстырмалы компактты* (немесе *шалакомпакты*)деп аталады, егер оның $\bar{M}$ тұйықтаушысы да компактты болса.

Салыстырмалы компактты жиын тұйықталған.

Дәлелдеу. Шынымен де, M салыстырмалы компактты бірақ шенелмеген леп алайық, ал x_1 — M жиынындағы кез келген нүкте болсын. M шенелмеген болғандықтан $K(x_1, 1)$ шарының сыртында жататын $x_2 \in M$ нүктесі табылады. $r_2 = \rho(x_1, x_2) + 1$ орнына қоямыз. M шенелмеген болғандықтан $x_3 \notin K(x_1, r_2)$ болатын $x_3 \in M$ нүктесі табылады. $r_3 = \rho(x_1, x_3) + 1$ орнына қоямыз және т.с.с жалғаса береді. Бірде бір жинақталатын ішкі тізбегі болмайтын $i \neq j$ болғандағы $\rho(x_i, x_j) \geq 1$ болатын $\{x_n\} \subset M$ тізбегін аламыз. Ал бұл M жиынының салыстырмалы компактты болуына қарама қайшы келеді. Дәлелденді.

Егер X метрикалық кеңістігіндегі әрбір ақырсыз ішкі жиынында, X —тің қайсыбір элементіне жинақталатын тізбек бар болса, онда X кеңістігін компактты деп атайды. Сонымен қатар компактты метрикалық кеңістік те компактты деп аталады. Компакт – бұл толық метрикалық кеңістік болып табылады.

Теорема 4. (Кантор) X метрикалық кеңістігінде бос емес компактты жиынның

$$K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots \supset$$

тізбектері берілсін. Олардың қиылысуы

$$K = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$$

да бос емес.

Дәлелдеу. Шынымен де, әрбір K_i жиынынан x_i нүктесін таңдап алсақ, $\{x_i\} \subset K_1$ тізбегін аламыз. K_1 компакттілі болғандықтан $\{x_i\}$ тізбегінен $\{x_{ij}\}$ жинақталатын ішкі тізбекті таңдап алуымызға болады. $x_0 = \lim x_{ij}$ болсын. Демек, кез келген белгіленген n үшін $i_i > n$ номерінен бастап осы тізбектің барлық мүшелері K_n мен K_n —де тұйық жатады, онда $x_0 \in K_n$. Бірақ онда

$$x_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i.$$

Метрикалық кеңістіктегі компакттілік

Толық шенелгендік. Метрикалық кеңістіктегі компакттілік толық шенелген ұғымымен тығыз байланысты.

R метрикалық кеңістігінде M қандай да бір жиын болсын және ε — оң сан берілсін. R — дегі A жиынын M үшін ε —желісі деп атаймыз, егер кез келген $x \in M$ нүктесі үшін

$$\rho(x, a) \leq \varepsilon$$

болатындай, ең болмағанда бір $a \in A$ нүктесі табылса. (A жиыны M —де жатуы міндетті емес және де M жиынымен ортақ нүктесі болмауы да мүмкін, бірақ M үшін қандай да бір A ε —желісі бола тұра $B \subset M$ 2ε —желісін тұрғызуға болады.)

Мысалы, бүтін сандар нүктелері жазықтықта $1/\sqrt{2}$ - желісін құрады. M жиынын жете шенелген деп атайды, егер ол үшін кез келген $\varepsilon > 0$ болғанда ақырлы ε –желісі бар болса. Шенелген жиынның ақырлы сандарының қосындысы сияқты жете шенелген жиын міндетті түрде шенелген болуы керек.

Келесі ескертулерді айта кетсек: егер M жиыны жете шенелген болса, онда оның $[M]$ тұйықтаушысы да жете шенелген болады.

Егер R метрикалық кеңістігі жете шенелген болса, онда ол сепарабельді болады. Шынында да, R –де әрбір n үшін $1/n$ -желісін тұрғызамыз. Барлық n бойынша қосындысы R -жиының барлық жерінде тығыз орналасады. Сепарабельді метрикалық кеңістіктің саналымды базасы бар болғандықтан, біз кез келген жете шенелген метрикалық кеңістіктің де саналымды базасы бар болатынын аламыз.

$$x^* = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \quad (2)$$

Салдар. Кез келген саналымды–компакты метрикалық кеңістік компактты.

Метрикалық кеңістіктің компактiлiгi үшiн толық шенелгендік ең қажетті шарт екенін көрсеттік. Бұл шарт жеткілікті емес: мысалы, $[0, 1]$ кесіндісінің рационал нүктелерінің жиынтығы және оның ара қашықтықтарының арасында жете шенелгендік бар, бірақ компактты кеңістік болмайды; бұл кеңістіктің нүктелер тізбектері $0; 0,4; 0,41; 0,414; 0,4142; \dots$, яғни $\sqrt{2} - 1$ ондық жуық санының тізбектері, шектік нүктелері болмайды.

Теорема 6. R метрикалық кеңістігі компактiлi боолу үшiн, ол бiр уақытта

1) жете шенелген,

2) толық

болуы қажетті және жеткілікті.

Әрбір нүктенің айналасына R –де 1- желі құратындай, радиусы 1–ге тең тұйықталған шар орнатайық. Сол сияқты бұл шарлар барлық R –ді жабады, ал олардың саны ақырлы, онда ең болмағанда олардың біреуі, B_1 деп алсақ, $\{x_n\}$ тізбегінің $x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots$ ақырсыз ішкі тізбегі бар болады. Содан, B_1 –де $1/2$ - желісін таңдап алып және әрбір нүктеге радиусы $1/2$ –ге тең тұйықталған шар тұрғызамыз. Ең болмағанда, осы шарлардың біреуі, B_2 деп алсақ, $\{x_n^{(1)}\}$ тізбегінің $x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, \dots$ ақырлы ішкі тізбектері бар болады. Сол сияқты, $\{x_n^{(2)}\}$ тізбегінің $x_1^{(3)}, \dots, x_n^{(3)}, \dots$

ақырлы ішкі тізбегін құратын, радиусы $1/4$, центрі B_2 болатын, B_3 тұйықталған шарын табамыз және т.с.с. Енді, әрбір B_n шарымен қатар, сол центрмен бірақ 2 есе үлкен радиуспен берілген A_n тұйықталған шарын қарастырамыз. A_n шарлары бір–біріне енгізілгенін көру оңай. R кеңістігінің толықтығына сүйене

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

қиылысуы бос емес және x_0 нүктесінен құралады. Бұл нүкте – алғашқы $\{x_n\}$ тізбегі үшін шекті болады, оның әрбір аймағы кейбір B_k шарынан тұрады, демек $\{x_n\}$ тізбегінің $\{x_n^{(k)}\}$ ақырсыз ішкі тізбегін де құрайды.

Теорема 7. R толық метрикалық кеңістігінде жатқан M жиыны шалакомпактілі болуы үшін, оның жете шенелген болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі 6–теоремадан келіп шығады, яғни толық метрикалық кеңістіктің тұйықталған ішкі жиынының өзі толық болады.

Бұл теореманың мағынасы, оның шалакомпакты екенін дәлелдеуден бұрын, ереже бойынша сол немесе басқа жиынның толық шенелетіндігін орнату жеңіл.