

Тақырып: Метрикалық кеңістік. Қосынды үшін Гельдер, Минковский теңсіздіктері. Жинақтылық. Ашық және тұйық жиындары. Тығыз ішкі жиыны. Сеперабель кеңістіктер.

Математикалық анализде, ең маңызды түсініктердің бірі шекке көшу ұғымы екені белгілі, ал бұның өзі де функционалдық анализге қатысты.

Анықтама. Табиғаттың кез келген элементі үшін шекке көшу ұғымы енгізілген жиынды абстрактілі кеңістік деп атаймыз.

Ең қарапайым шекке көшудің енген әдісі оның метризациясы, яғни жиындағы элементтер арасындағы ара қашықтығын анықтау заңдылығы болып табылады.

Бұл бөлімде ара қашықтық ұғымымен танысамыз.

Анықтама. X қайсыбір бос емес жиын болсын. X жиыны метрикалық кеңістік деп аталады, егер оның әрбір x және y пар элементіне теріс емес $\rho(x, y)$ нақты саны сәйкес қойылып төмендегі шарттарды қанағаттандырса:

$\rho(x, y) > 0$ және $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (тепе-теңдік аксиомасы).

$\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметриялық қасиет).

$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (үшбұрыштық аксиомасы).

Бұл $\rho(x, y)$ саны x және y элементтерінің арасындағы ара қашықтығы (немесе X кеңістігінің метрикасы), ал аталған үш шарттар метриканың аксиомалары деп аталады.

Метрикалық кеңістіктің элементтерін біз нүктелер деп атаймыз. X метрикалық кеңістігінде жатқан кез келген U жиыны сол кеңістіктің элементтерінің ара қашықтығымен берілсе метрикалық кеңістік болып табылады да, X кеңістігінің ішкі кеңістігі деп аталады.

Анықтама. Бос емес X жиыны мен анықталған метрика, яғни (X, ρ) пары, метрикалық кеңістік деп аталады.

Тізбектің шегі. X метрикалық кеңістігінің x элементін X -тегі $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ элементтер тізбегінің шегі деп атаймыз, егер $n \rightarrow \infty$ болғанда $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ орындалса. Онда $x_n \rightarrow x$ немесе $\lim x_n = x$ деп жазып, $\{x_n\}$ тізбегі x -ке жинақталады деп атаймыз.

Теорема 1. Егер X метрикалық кеңістігінің $\{x_n\}$ нүктелер тізбегі $x \in X$ нүктесіне жинақталса, онда $\{x_n\}$ тізбегінің кез келген $\{x_{n_k}\}$ ішкі тізбегі осы нүктеге жинақталады.

Теорема 2. Метрикалық кеңістігінің $\{x_n\}$ нүктелер тізбегі кемінде бір шекке жинақталуы мүмкін.

3. Үзіліссіз функциялар кеңістігі. X — $[0, 1]$ кесіндісінде берілген барлық үзіліссіз функциялар жиыны болсын. Метриканы енгізейік

$$\rho(x, y) = \max_t |x(t) - y(t)|.$$

4. Шенелген сан тізбектерінің кеңістігі. $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ шенелген сан тізбектерінің X жиыны болсын. Кез келген x үшін K_x тұрақтысы табылып, барлық i үшін $|\xi_i| \leq K_x$ орындалады.

$x = \{\xi_i\}$ және $y = \{\eta_i\}$ X жиынына тиісті болсын.

$$\rho(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i|$$

теңдігінің көмегімен ара қашықтық енгіземіз. Үшбұрыштар аксиомасын тексеру ғана қалды. $x = \{\xi_i\}$, $y = \{\eta_i\}$, $z = \{\zeta_i\}$ үшін

$$|\xi_i - \zeta_i| \leq |\xi_i - \eta_i| + |\eta_i - \zeta_i| \leq \sup_i |\xi_i - \eta_i| + \sup_i |\eta_i - \zeta_i| = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Демек,

$$\sup_i |\xi_i - \zeta_i| = \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Осылай алынған кеңістікті шенелген сан тізбектерінің кеңістігі деп атаймыз және оны m деп белгілейміз.