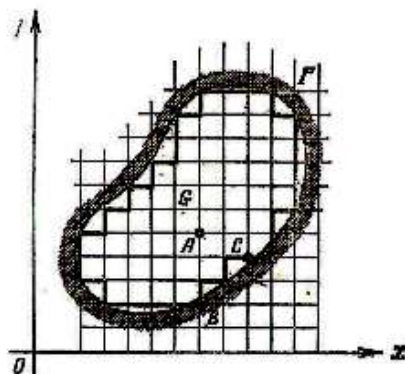


Торлар әдісі

Торлар әдісі немесе ақырлы айырымдар әдісі қазіргі кезде дербес туындылы теңдеуді шешудің кеңінен тараған сандық әдістерінің бірі. Бұл әдіс бойынша туынды ақырлы-айырымдық қатынаспен алмастырылады.

Оху жазықтығында Γ шекарасы бар қандай бір G облысы берілсін.



1-сурет

Жазықтықта екі параллель түзулер үйірін тұрғызайық

$$x = x_0 + ih \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$y = y_0 + kl \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Осы түзулердің қиылысу нүктесі түйін деп аталады. Егер екі түйін Ox немесе Oy осінің бағытымен бір-бірінен сәйкес h немесе l тор қадамына тең қашықтықта болса, онда олар көрші түйіндер деп аталады. Барлық төрт көрші түйіндер осы D облысына тиісті болса, онда түйіндер ішкі түйіндер деп аталады.

Егер көрші төрт түйіннің ең болмағанда біреуі D облысына тиісті емес болса, онда түйіндер шекаралық түйіндер $u_{ik} = u(x_0 + ih, y_0 + kl)$ арқылы $u = u(y, x)$ ізделінді

функцияның тор түйіндеріндегі мәндерін белгілейік.

Әрбір ішкі $(x_0 + ih, y_0 + kl)$ түйінде дербес туындыны айырымдық қатынаспен алмастырайық:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2l};$$

Шеттік нүктелерде келесі формулаларды қолданамыз:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{ik}}{h}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{ik}}{l};$$

Осылайша, екінші ретті дербес туындылар алмастырылады

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{ik} &\approx \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2}; \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{ik} &\approx \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2}; \end{aligned} \tag{1}$$

Көрсетілген алмастырулар тордың әрбір түйіндерінде дербес туындылы теңдеулерді шешу – айырымдық теңдеулер жүйесін шешуге келіп тіреледі.

Дирихле есебі үшін торлар әдісі.

Бірінші шектік есеп немесе Пуассон теңдеуі үшін

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (2)$$

Дирихле есебі: Қандай да бір G облысының ішінде (2) теңдеуді қанағаттандыратын, ал Γ шекарасында

$$u|_{\Gamma} = \phi(x, y) \quad (3)$$

шартын қанағаттандыратын $u = u(x, y)$ формуласын табу керек, мұндағы $\phi(x, y)$ – берілген үзіліссіз функция.

h және l қадамдарын сәйкес x және y деп таңдап, тор тұрғызамыз $x = x_0 + ih \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ және әрбір ішкі (x_i, y_k) түйінінде $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ туындыларын (1) ақырлы айырымдар қатынасымен алмастырып (2) теңдеуді мына түрде жазамыз:

$$\frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2} + \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2} = f_{ik}, \quad (4)$$

мұндағы $f_{ik} = f(x_i, y_k)$

$u(x, y)$ функциясының мәндеріне қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін береді.

Дербес жағдай. Егер G облысы тік төртбұрыш және $h = l$ болса, онда (4) теңдеулер былайша жазылады:

$$u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1} - 4u_{ik} = h^2 f_{ik} \quad (4')$$

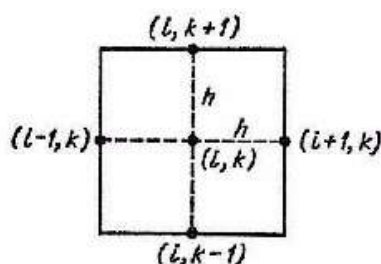
Егер $f(x, y) \equiv 0$ болғанда (2) Лаплас теңдеуі деп аталады.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{және сәйкес ақырлы-айырымдық теңдеулер келесі}$$

түрде жазылады:

$$u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1} - 4u_{ik} = 0 \quad (4'')$$

(4') және (4'') теңдеулерді жазған кезде келесі түйіндер сұлбасы қолданылды:



2-сурет

Дифференциалдық теңдеуді айырымдық теңдеумен алмастыру қателігі, яғни Лаплас теңдеуі үшін қалдық мүше R_{ik} келесі теңсіздікпен бағаланады:

$$|R_{ik}| \leq \frac{h^2}{6} \mu_4$$

мұндағы

$$\mu_4 = \max \left\{ \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \right| \right\}$$

Айырымдық әдіспен алынған жуықтаң шешімнің қателігі келесі үш қателіктерден құралады:

1. Дифференциалдық теңдеуді айырымдық теңдеумен ауыстырғандағы қателіктен;
2. Шеттік шарттарды жуықтау қателігінен;
3. Айырымдық теңдеулер жүйесін жуықтап шешу нәтижесінде пайда болатын қателіктерден.