15-дәріс. Тұрақты коэффициентті сызықты жүйелерді интегралдау. Сипаттауыш теңдеу. Меншікті сандар, меншікті векторлар, квазикөпмүшелік.

аға оқытушы, PhD

Бекенаева К.С.

Дәріс жоспары:

1. Тұрақты коэффициентті сызықты жүйелерді интегралдау
2. Біртексіз сызықты жүйелерді шешудің тұрақтыны вариациялау әдісі

Дәріс мақсаты: Сызықты жүйелерді интегралдау әдістерімен таныстыру.

Тұрақты коэффициентті сызықты жүйелерді интегралдау

4.1. Коэффициенттері тұрақты біртекті сызықты жүйені қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \qquad (1)$$

Мұнда $x = colon(x_1,...,x_n), A = (a_{ij})$ - тұрақты накты квадрат матрица.

Бұл жүйенің шешімін Эйлер әдісі бойынша

$$x = \alpha e^{\lambda t} \qquad (2)$$

түрінде іздейміз. Мұнда λ -белгісіз сан, α -нөлдік емес белгісіз тұрақты вектор.

Осы (2) өрнекті (1) жүйеге қойсақ,

$$(A - \lambda E)\alpha = 0 \qquad (3)$$

түріндегі векторлық алгебралық теңдеу аламыз. Бұл теңдеуді ашып жазсақ,

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ .... \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

түріндегі сызықты теңдеулер жүйесін аламыз. Жүйенің нөлдік емес шешімі бар болуы үшін оның анықтауышы нөлге тең болуы керек:

$$|A - \lambda E| = 0 \qquad (5)$$

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

Осы теңдеу берілген жүйенің сипаттаушы теңдеуі деп аталады. Оның түбірлері A матрицасының меншікті сандары (мәндері), ал әрбір меншікті санға сәйкес α векторын A матрицасының меншікті векторы деп атайды.

Меншікті сандардың түрлеріне байланысты фундаменталь матрица әртүрлі болады.Сол жағдайларды қарастырайық.

1^0. Айталық, меншікті сандар әртүрлі нақты сандар болсын: $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. Осындағы белгілі бір λ_i меншікті санына сәйкес α_i векторының координаттары (4) жүйеден табылады. Ол үшін λ-ның орнына λ_i-ді қою керек. Егер $x_i = colon(x_{1i},\dots,x_{ni})$, ал $\alpha_i = colon(\alpha_{1i},\dots,\alpha_{ni})$ деп алсақ, онда λ_i-ге сәйкес шешім

$$x_{1i}(t) = \alpha_{1i}e^{\lambda_i t},\dots,x_{ni}(t) = \alpha_{ni}e^{\lambda_i t} \qquad (7)$$

түрінде жазылады. Сондықтан, бұл жағдайда фундаменталь матрица былай жазылады:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Бұл матрицаның анықтауышы нөлге тең емес, өйткені оның әрбір бағанасы өзара тәуелсіз. Сондықтан, жалпы шешім

$$x(t)=C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t}+\ldots+C_n\alpha_n e^{\lambda_n t} \tag{9}$$

түрінде жазылады немесе матрица түрінде

$$x(t)=\Phi(t)C \tag{10}$$

Мұндағы, C -бір бағаналы тұрақты матрица.

2^0. Айталық, $\lambda_1=a+ib$ - сипаттаушы теңдеудің жәй түбірі болсын. Онда оның түйіндесі $\overline{\lambda}_1=a-ib$ саны да сол теңдеудің түбірі болады. Бұл жағдайда сәйкес шешім

$$x_1(t)=(\gamma_{11}+i\gamma_{12})e^{(a+ib)t} \tag{11}$$

түрінде жазылады. Соңғы қатынастың нақты және жорамал бөліктерін ажыратайық:

$$x_1(t)=(\gamma_{11}+i\gamma_{12})e^{at}(\cos bt+i\sin bt)=$$

$$=e^{at}(\gamma_{11}\cos bt-\gamma_{12}\sin bt)+ie^{at}(\gamma_{12}\cos bt+\gamma_{11}\sin bt)$$

Жүйенің коэффициенттері нақты болғандықтан, комплекс шешімнің нақты және жорамал бөліктері өз алдарына нақты шешімдер болып табылады. Сондықтан,

$$\begin{aligned} x_{11}(t)&=Re\,x_1(t)=e^{at}(\gamma_{11}\cos bt-\gamma_{12}\sin bt)\\ x_{12}(t)&=Im\,x_1(t)=e^{at}(\gamma_{12}\cos bt+\gamma_{11}\sin bt)\end{aligned} \tag{12}$$

функциялары берілген жүйенің нақты шешімдері болады. Бұл шешімдер өзара сызықты тәуелсіз.Түйіндес $a-ib$ түбірі жаңа тәуелсіз шешімдер тудырмайды. Демек, бір пар комплексті түбірге өзара тәуелсіз екі нақты шешім сәйкес келеді. Олар өзара сызықты тәуелсіз болғандықтан, фундаменталь шешімдер жүйесіне кіреді. Осы сияқты, барлық түбірлер үшін нақты шешімдерді құрып шығуға болады. Олардың сызықты комбинациясы жүйенің жалпы шешімін береді.

3^0. Сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің кейбіреулері еселікті түбірлер болатын жағдайды қарастырайық.

Айталық, λ_1-саны k - еселікті түбір болсын. Бұл түбірге бір немесе бірнеше меншікті векторлар сәйкес келуі мүмкін. Олардың саны жалпы алғанда k -дан аспайды. Сондықтан, (2) формула бойынша анықталатын шешімдердің саны k -дан кем болуы мүмкін. Осы жетпей жатқан шешімдерді толықтыру үшін төмендегідей әдіс қолданылады.

Айталық, $x(t)$ векторы (1) жүйенің шешімі болсын.

$D=\frac{d}{dt}$ - дифференциалдық оператор енгізу арқылы берілген жүйені координаттары бойынша ашып жазайық:

$$a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n-Dx_i=0,(i=1,\ldots,n) \qquad (13)$$

Бұл сызықты жүйенің анықтауышы $|A-ED|=M(D)$. Ол D-операторы бойынша n дәрежелі көпмүшелік. Егер D-ның орнына λ-ны қойсақ, ол сипаттаушы көпмүшелікке айналады.

Құрылған (13) қатынасты $|A-ED|$ анықтауышының алгебралық толықтауышы $A_{ij}(D)$-ға көбейтіп, i-индексі бойынша қосындыласақ,

$$M(D)x_i=0,(i=1,...,n) \tag{14}$$

теңдеуін аламыз. Бұл x_i бойынша n-ретті дифференциалдық теңдеу. Оның сипаттаушы көпмүшелігі (1) жүйенің сипаттаушы көпмүшелігіне тең. Сондықтан, (5) теңдеудің k-еселікті λ_1 түбіріне сәйкес келетін (1) жүйенің $x(t)$ шешімінің i-інші компоненті мына түрде жазылады:

$$x_i(t)=(C_{1i}+C_{2i}t+...+C_{ki}t^{k-1})e^{\lambda_1 t}$$

Мұнда C_{ki} - тұрақты сандар. Сонымен,

$$x(t)=\begin{pmatrix} C_{11}+C_{21}t+...+C_{k1}t^{k-1} \\ .... \\ C_{1n}+C_{2n}t+...+C_{kn}t^{k-1} \end{pmatrix}e^{\lambda_1 t} \tag{15}$$

Бұл шешімдегі $C_{ij}\ (i=1,...,k;\ j=1,...,n)$ тұрақты сандарының бәрі бірдей еркін бола алмайды, өйткені $x(t)$ шешімінің компоненттері (13) қатынас арқылы өзара сызықты байланысқан. Бұл тұрақтылардың ішінде тәуелсіздерінің саны λ_1 - түбірінің еселігіне тең, яғни k-ға тең. Осы еркін тұрақтыларды $C_1,...,C_k$ - деп белгілейік. (15) шешімді (1) жүйеге қойып, алдын ала $e^{\lambda_1 t}$ - ға қысқартып, t-ның бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестірсек, k біртекті теңдеулердің сызықты жүйесін аламыз. Ондағы белгісіз C_{ij}

тұрақтыларының саны $k \times n$. Оларды $C_1,...,C_k$ еркін тұрақтылары арқылы өрнектесек, онда (15) шешімді былай жазуға болады:

$$x(t) = \left[C_1 p_1(t) + \ldots + C_k p_k(t)\right] e^{\lambda_1 t} \tag{16}$$

Мұндағы, $p_i(t)$ - векторларының компоненттері t бойынша дәрежелері $k-1$ - ден аспайтын көпмүшеліктер құрайды.

Сонымен, сипаттаушы теңдеудің k еселікті λ_1 түбіріне $p_i(t)e^{\lambda_1 t}$ түріндегі шешім сәйкес қойылды. Осы сияқты кез келген k_s еселікті λ_s түбіріне де сәйкес шешім құрып шығуға болады. Олардың жиыны берілген жүйенің фундаменталь шешімдер жүйесі болатынын көрсету үшін вронскианның $t = 0$ нүктесінде нөлге айналмайтынын көрсетсе, жеткілікті (дәлірек, дәлелдеуді [5] оқу құралынан көруге болады).

4.2. Тұрақты коэффициентті біртексіз жүйені қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) \tag{17}$$

Мұнда $x = colon(x_1,...,x_n)$, $f(t) = colon(f_1,...,f_n)$, $A = (a_{ij})$ - квадрат матрица. Оның сәйкес біртектісі:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{18}$$

жүйесінің жалпы шешімі элементар функциялар арқылы өрнектелетіні өткен пунктте көрсетілді. Жалпы жағдайда біртексіз жүйенің жалпы шешімі тұрақтыларды вариациялау арқылы оңай табылады.

Егер (17) жүйедегі $f(t)$ вектор-функция квазикөпмүшелік түрінде берілсе, онда жүйенің дербес шешімін анықталмаған коэффициенттер әдісін қолданып табуға болады. Табылған дербес шешімді біртекті жүйенің жалпы шешімімен қоссақ, берілген (17) жүйенің жалпы шешімін аламыз.

Айталық, біртексіз жүйе төмендегідей түрде берілсін:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P_m(t)e^{\alpha t} \tag{19}$$

Мұндағы, $P_m(t)$ - дәрежесі m -нен аспайтын көпмүшелікті вектор, яғни

$$P_m(t) = \sum_{k=0}^{m} p_k t^k , \tag{20}$$

мұндағы p_k - тұрақты векторлар.

Бұл жерде екі жағдай қарастырылады.

1^0. Резонанс емес жағдай: α саны A матрицасының меншікті саны емес. Бұл жағдайда дербес шешім

$$x(t) = Q_m(t)e^{\alpha t} \tag{21}$$

түрінде ізделінеді. Мұнда $Q_m(t)$ - вектор:

$$Q_m(t) = \sum_{k=0}^{m} q_k t^k \tag{22}$$

мұнда q_k - белгісіз тұрақты вектор.

Осы өрнекті (19) теңдікке қойып, t-ның әртүрлі дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерін теңестіреміз:

$$(\alpha E - A)Q_m(t) = P_m(t) - \frac{dQ_m(t)}{dt} \tag{23}$$

Осыдан

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha E - A)q_m = p_m, \\ &(\alpha E - A)q_{m-1} = p_{m-1} - mq_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Мұнда $\alpha E - A$ матрицасы ерекше емес. Сондықтан, (24) жүйеден сатылап барлық q_m векторларын бірмәндес түрде анықтауға болады:

$$q_m = (\alpha E - A)^{-1} p_m \tag{25}$$

екінші теңдеуден q_{m-1} векторын, осылай барлық векторларды табамыз.

2^0. Резонанс жағдай: α саны A матрицасының меншікті саны. Бұл жағдайда дербес шешім

$$x(t) = Q_{m+1}(t)e^{\alpha t} \tag{26}$$

түрінде ізделінеді. Мұнда $Q_{m+1}(t)$ - вектор-функция, оның әрбір компоненті дәрежесі $m+1$-ден аспайтын көпмүшелік.

Қолданылған әдебиеттер:

1. Мырзалыұлы Ж. Дифференциалдық теңдеулер: оқу құралы. – Алматы: Қазақ университеті баспасы, – 2006ж., 148 бет.
2. Сүлеймен Ж. Дифференциалдық теңдеулер курсы: оқулық. – Алматы: Қазақ университеті, – 2009. - 440 бет.
3. Мұхтаров М., Исмағұлова Н.М. Дифференциалдық теңдеулер бойынша дәрістер: оқу құралы. – Павлодар: Кереку, – 2015. - 410 бет.