# 13-дәріс. Біртекті сызықты теңдеулер жүйелері. Сызықты жүйелердің жалпы қасиеттері. Біртекті жүйенің шешімдерінің қасиеттері.

*аға оқытушы, PhD*

*Бекенаева К.С.*

**Дәріс жоспары**:

1. Сызықты теңдеулер жүйесінің жалпы қасиеттері
2. Біртекті сызықты жүйелер
3. Сызықты жүйенің базисі немесе фундаментальды шешімдер жүйесі
4. Лиувилль формуласы

**Дәріс мақсаты**: Сызықты біртекті теңдеулердің қасиеттерімен таныстыру; сызықты біртекті жүйелері және олардың қасиеттерін оқып-зерттеу.

**Сызықты жүйелердің жалпы қасиеттері**

**1.1.** Қарапайым теңдеулер жүйелердің ең маңызды дербес түрі – сызықты жүйелер болып есептелінеді. Оның скалярлық түрдегі жазылуы төмендегідей болады:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = p_{11}(t)x_1 + \ldots + p_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = p_{n1}(t)x_1 + \ldots + p_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Мұндағы, $p_{ij}(t)$ және $f_i(t)$ функциялары кейбір $\langle a,b \rangle$ аралығында анықталған нақты үздіксіз функциялар деп қарастырылады. Бұл жүйені былайша жазуға да болады:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)x_j + f_i(t), (i=1,\ldots,n) \qquad (2)$$

Егер $P(t) = \left(p_{ij}(t)\right), (i = 1,\ldots,n)$ матрицасын енгізсек, ал $x$ пен $f$-ты вектор немесе бір бағаналы матрицалар деп қарастырсақ, онда берілген жүйені төмендегідей векторлы-матрицалық түрде жазуға болады:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + f(t) \qquad (3)$$

Бұл қатынасты жүйе деумен қатар (оның векторлық мағынасын ескеріп), бір теңдеу деп те айтуға болады.

Әдетте, $f(t)$ – вектор-функцияны бос мүше деп атайды. Егер осы бос мүше нөлге тең болса, онда (3) жүйенің орнына оның біртектісін аламыз:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x \tag{4}$$

Бос мүше нөлге тең болмағанда (3) жүйені (4) жүйенің сәйкес біртексізі деп атайды.

Бұл жүйелер үшін Коши есебі мына түрде қойылады: барлық векторлардың ішінен

$$\varphi(t_0) = x^0, t_0 \in \langle a,b \rangle$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын шешімді табу керек. Мұндағы, $x^0$ - берілген бастапқы вектор.

**1.2.** Сызықты жүйелердің жалпы қасиеттерін келтірейік:

$1^0$. Тәуелсіз айнымалыны үздіксіз дифференциалданатын функция арқылы басқа бір тәуелсіз айнымалымен алмастырғаннан жүйенің сызықтығы өзгермейді.

Шынында да, $t = \varphi(\tau), \varphi'(\tau) \neq 0, \forall \tau \in \langle c,d \rangle$ алмастыруын жасайық. Туындыны жаңа айнымалы арқылы өрнектейік:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{1}{\varphi'(\tau)}$$

Осыдан,

$$\frac{1}{\varphi'(\tau)} \cdot \frac{dx}{d\tau} = P\left[\varphi(\tau)\right]x + f\left[\varphi(\tau)\right]$$

немесе

$$\frac{dx}{d\tau} = P\left[\varphi(\tau)\right]\varphi'(\tau)x + f\left[\varphi(\tau)\right]\varphi'(\tau)$$

яғни,

$$\frac{dx}{d\tau} = \overline{P}(\tau)x + \overline{f}(\tau) \qquad (5)$$

түріндегі жаңа сызықты жүйеге қайта келдік.

$2^0$. Белгісіз функцияны сызықты түрлендіргеннен жүйенің сызықтығы өзгермейді.

Шынында да, айталық $x = \alpha(t)y + \beta(t)$ түрінде алмастыру жасалсын. Мұнда $\alpha(t) = (\alpha_{ij}), (i, j = 1, \ldots, n)$ ерекше емес матрица, яғни оның анықтауышы нөлге тең емес. Осы қатынастан туынды алып берілген жүйенің өзін пайдалансақ, мынандай қатынастар аламыз:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\frac{dy}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}y + \frac{d\beta}{dt}$$

яғни,

$$P(t)[\alpha y+\beta]+f=\alpha\frac{dy}{dt}+\frac{d\alpha}{dt}y+\frac{d\beta}{dt}$$

Осыдан,

$$\frac{dy}{dt}=\alpha^{-1}\left[P(t)\alpha-\frac{d\alpha}{dt}\right]y+\alpha^{-1}\left[P(t)\beta+f(t)-\frac{d\beta}{dt}\right]$$

немесе

$$\frac{dy}{dt}=\overline{P}(t)y+\overline{f}(t)$$

Мұндағы,

$$\overline{P}(t)=\alpha^{-1}\left[P(t)\alpha-\frac{d\alpha}{dt}\right],$$

$$\overline{f}(t)=\alpha^{-1}\left[P(t)\beta+f(t)-\frac{d\beta}{dt}\right]$$

**Біртекті сызықты жүйелер**

**2.1.** Төмендегідей біртекті сызықты теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x \tag{1}$$

Осы жүйенің шешімдерінің кейбір қасиеттерін келтірейік. Ең алдымен ескеретін жәй – біртекті жүйенің бастапқы Коши есебінің $x(t_0) = 0$ шартын қанағаттандыратын нөлдік $x(t) = 0$ шешімі барлық уақытта бар және ол шешім жалғыз.

**Теорема-1.** Егер $\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)$ – вектор-функциялары (1) жүйенің шешімдері болса, олардың кез келген сызықты комбинациясы да сол жүйенің шешімі болады.

**Дәлелдеуі.** Берілген функциялардың нақты сандар өрісіндегі сызықты комбинациясын алайық:

$$\varphi(t) = \alpha_1 \varphi^1(t) + \ldots + \alpha_n \varphi^n(t) \tag{2}$$

Мұндағы, әрбір $\varphi^i(t)$ функциясы үшін

$$\frac{d\varphi^i(t)}{dt} = P(t)\varphi^i(t), \forall t \in \langle a, b \rangle$$

тепе-теңдігі орындалады.

Осыдан,

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=\alpha_1\frac{d\varphi^1(t)}{dt}+\ldots+\alpha_n\frac{d\varphi^n(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i P(t)\varphi^i(t)=$$

$$=P(t)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi^i(t)=P(t)\varphi(t),\ \forall t\in\langle a,b\rangle$$

**Теорема-2.** Егер (1) жүйенің комплексты $\varphi(t)=u(t)+iv(t)$ шешімі бар болса, онда оның нақты және жорамал бөліктері өз алдарына (1) жүйенің шешімін береді.

**Дәлелдеуі.** Шарт бойынша

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=\frac{du(t)}{dt}+i\frac{dv(t)}{dt}=P(t)\big(u(t)+iv(t)\big)=P(t)u(t)+iP(t)v(t)$$

Осыдан,

$$\frac{du(t)}{dt}=P(t)u(t),\ \frac{dv(t)}{dt}=P(t)v(t),\ \forall t\in\langle a,b\rangle \tag{3}$$

**Анықтама-1.** Егер $\langle a,b\rangle$ аралығында анықталған $\varphi^1(t),\ldots,\varphi^n(t)$ функциялары үшін бәрі бірдей нөлге тең емес $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ сандары табылып,

$$\alpha_1\varphi^1(t)+\ldots+\alpha_n\varphi^n(t)=0,\ \forall t\in\langle a,b\rangle \tag{4}$$

теңдігі орындалса, онда берілген функциялар жиыны $\langle a,b \rangle$ аралығында сызықты тәуелді деп аталынады, ал (4) теңдік $\alpha_1,...,\alpha_n$ сандарының тек нөлдік мәндерінде ғана орындалса, онда берілген функциялар жиыны $\langle a,b \rangle$ аралығында сызықты тәуелсіз деп аталады.

**Ескерту.** Егер берілген функциялар жиыны $\langle a,b \rangle$ аралығында сызықты тәуелді болса, онда сол аралыққа жататын кез келген $t_0 \in \langle a,b \rangle$ нүктесінде де тәуелді болады. Кері ұйғарым орындалмайды, өйткені бұл жағдайда $\alpha_1,...,\alpha_n$ сандары $t_0$-ға тәуелді болады. Ал егер берілген функциялар жиыны белгілі бір дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдері болса, онда бір нүктедегі тәуелділік пен тәуелсіздік сәйкес аралықтағы тәуелділік пен тәуелсіздікке эквивалент.

**Анықтама-2.** Біртекті сызықты жүйенің $\langle a,b \rangle$ аралығында анықталған $n$ сызықты тәуелсіз шешімдер жиынын сол жүйенің осы аралықтағы базисі немесе фундаменталь шешімдер жүйесі деп атайды.

**2.2.** Айталық, $\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)$ вектор-функциялары (1) жүйенің шешімдері болсын. Әрбір бағанасы осы векторлардың координаттарынан тұратын төмендегідей матрица құрайық:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Осы матрицаның анықтауышын Вронский анықтауышы немесе вронскиан деп атайды және оны $W(t)$ - деп белгілейді. Сонымен,

$$W(t) = W\left[\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)\right] = det\,\Phi(t) \tag{6}$$

Егер (5) матрицаның анықтауышы нөлге тең болмаса, онда ол матрица фундаменталь матрица деп аталынады.

**Теорема-3.** Егер $\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)$ функциялары $\langle a, b \rangle$ аралығында сызықты тәуелді болса, онда осы аралықта олардың вронскианы нөлге тең болады.

**Дәлелдеуі.** Анықтама бойынша

$$\alpha_1 \varphi^1(t) + \ldots + \alpha_n \varphi^n(t) = 0 \tag{7}$$

мұнда $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ сандарының бәрі бірдей нөл емес. Соңғы қатынасты координаттар бойынша ашып жазсақ, төмендегідей біртекті сызықты жүйе аламыз:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \varphi_{11}(t) + \ \ldots + \alpha_n \varphi_{1n}(t) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 \varphi_{n1}(t) + \ \ldots + \alpha_n \varphi_{nn}(t) = 0 \end{array}\right\} \tag{8}$$

Бұл жүйенің нөлдік емес шешімі бар болу үшін оның анықтауышы нөлге тең болуы шарт, яғни $W(t) = 0, \forall t \in \langle a, b \rangle$.

**Теорема-4.** Егер $\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)$ функциялары (1) жүйенің $\langle a,b\rangle$ аралығындағы сызықты тәуелсіз шешімдері болса, онда осы аралықтың кез келген нүктесінде вронскиан нөлге тең болмайды.

**Дәлелдеуі.** Кері жориық. Айталық, кейбір $t_0 \in \langle a,b\rangle$ нүктеде $W(t_0)=0$ болсын. Белгісіз $\alpha_1,...,\alpha_n$ сандары арқылы төмендегідей теңдік құрайық:

$$\alpha_1\varphi^1(t_0)+\ ...+\alpha_n\varphi^n(t_0)=0 \tag{9}$$

немесе координаттары бойынша:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1\varphi_{11}(t_0)+\ ...+\alpha_n\varphi_{1n}(t_0)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_1\varphi_{n1}(t_0)+\ ...+\alpha_n\varphi_{nn}(t_0)=0\end{array}\right\} \tag{10}$$

Бұл жүйенің анықтауышы нөлге тең, өйткені ол анықтауыш $W(t_0)$. Сондықтан, оның нөлдік емес шешімі бар: $\alpha_1^{\ 0},...,\alpha_n^{\ 0}$.

Берілген шешімдердің сызықты комбинациясын қарастырайық:

$$x(t)=\alpha_1^{\ 0}\varphi^1(t)+\ ...+\alpha_n^{\ 0}\varphi^n(t) \tag{11}$$

Бұл вектор-функция берілген жүйенің шешімі болады (теорема-1).

Осындағы $\alpha_1^0,...,\alpha_n^0$ сандары (9) теңдікті қанағаттандырғандықтан, $x(t_0)=0$ теңдігі орындалады, яғни (11) шешімнің бастапқы мәні нөлге тең. Шешімнің жалғыздық шарты бойынша $x(t)$ нөлдік шешім. Сондықтан,

$$x(t)=\alpha_1^0\varphi^1(t)+\ ...+\alpha_n^0\varphi^n(t)=0, \forall t\in\langle a,b\rangle \tag{12}$$

Соңғы тепе-теңдік $\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)$ векторларының сызықты тәуелділігін көрсетеді. Бұл - теореманың шартына қайшы.

Соңғы екі теореманы біріктіріп айтсақ, мынандай қорытындыға келеміз: (1) жүйенің $n$ шешімі $\langle a,b\rangle$ аралығында сызықты тәуелсіз болу үшін олардың вронскианының $\langle a,b\rangle$ аралығының бірде-бір нүктесінде нөлге тең болмауы қажетті және жеткілікті.

**Теорема-5.** Егер $P(t)$ матрицасы $\langle a,b\rangle$ аралығында үздіксіз болса, онда (1) жүйенің базисы әрқашанда бар болады және егер $\varphi^1(t),...,\varphi^n(t)$ жүйенің базисы болса, онда оның жалпы шешімі мына түрде жазылады:

$$x(t)=C_1\varphi^1(t)+\ ...+C_n\varphi^n(t) \tag{13}$$

мұндағы, $C_1,...,C_n$ - кез келген тұрақты сандар.

**Дәлелдеуі.** Кез келген сызықты тәуелсіз $n$ векторлар: $a^1,...,a^n$ үшін кейбір $t_0 \in \langle a,b \rangle$ нүктесінде

$$\varphi^1(t_0)=a^1,...,\varphi^n(t_0)=a^n \tag{14}$$

шартын қанағаттандыратын шешімдер жиынын алсақ, жеткілікті. Бастапқы $\varphi^1(t_0),...,\varphi^n(t_0)$ мәндері сызықты тәуелсіз болғандықтан, бұл шешімдер $\langle a,b \rangle$ аралығында да тәуелсіз, яғни олар (1) жүйенің базисын құрайды.

Енді (13) қатынастың жалпы шешім болатынын көрсетейік. Біріншіден, бұл қатынас шешімдердің сызықты комбинациясы болғандықтан, $C_1,...,C_n$ сандарының барлық мәндерінде жүйенің шешімі болады (теорема-1). Екіншіден, одан кез келген Коши есебінің шешімін алуға болады. Ол үшін

$$x(t_0)=x^0 \tag{15}$$

шартын қоялық, яғни

$$C_1\varphi^1(t_0)+\ ...+C_n\varphi^n(t_0)=x^0 \tag{16}$$

Бұл векторлық теңдікті координаттары бойынша ашып жазсақ,

$$\left.\begin{array}{l} C_1\varphi_{11}(t_0)+\ ...+C_n\varphi_{1n}(t_0)=x_{10} \\ ........................................ \\ C_1\varphi_{n1}(t_0)+\ ...+C_n\varphi_{nn}(t_0)=x_{n0} \end{array}\right\} \tag{17}$$

жүйесін аламыз. Оның анықтауышы нөлге тең емес. Сондықтан, (17) жүйенің тек жалғыз ғана шешімі бар: $C_1^0,...,C_n^0$. Осы тұрақтыларды (13) қатынасқа қойсақ, (15) шартты қанағаттандыратын дербес шешім аламыз.

**2.3.** Жалпы шешімді фундаменталь матрица арқылы жазуға болады. Айталық, $\Phi(t)$ берілген (1) жүйенің фундаменталь матрицасы болсын. Оның әрбір бағанасы тәуелсіз векторлардың координаттары болғандықтан, бұл матрица матрицалық

$$\frac{dX}{dt} = P(t)X \tag{18}$$

теңдеудің шешімі болады, яғни

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = P(t)\Phi(t), \forall t \in \langle a,b \rangle \tag{19}$$

Осы матрицаны пайдалансақ, жалпы шешім

$$x(t) = \Phi(t)C \tag{20}$$

түрінде жазылады. Мұнда $C$ - кез келген тұрақты вектор. Бұл қатынастан Коши есебінің шешімін анықтауға болады: (15) бастапқы шартты пайдалансақ,

$$x^0 = \Phi(t_0)C$$

теңдігін аламыз. Осыдан $C^0 = \Phi^{-1}(t_0)x^0$. Сонда

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x^0 \tag{21}$$

түріндегі дербес шешім аламыз. Егер $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) = K(t,t_0)$ белгілеуін енгізсек, соңғы теңдік былай жазылады:

$$x(t) = K(t,t_0)x^0 \tag{22}$$

Осындағы $K(t,t_0)$ матрицасын Коши матрицасы деп атайды.

Егер соңғы қатынастағы $t_0$-ді тұрақталған сан, ал $x^0$-ді тұрақталмаған вектор деп есептесек, онда (22) қатынасты жүйенің Коши түріндегі жалпы шешімі деп атайды.

Егер кейбір $t_0 \in \langle a,b \rangle$ нүктесінде $\Phi(t_0) = E$ теңдігі орындалса, онда $\Phi(t)$ матрицасы $t_0$ нүктесінде қалыпталған (нормаланған) деп аталады. Бұл жағдайда шешім

$$x(t) = \Phi(t)x^0 \tag{23}$$

түрінде жазылады.

**Теорема-6.** Егер $\Phi(t)$ фундаменталь матрица болса, онда $\Psi(t) = \Phi(t)C$ матрицасы да фундаменталь матрица болады. Мұнда $C$ - тұрақты $(n \times n)$ - өлшемді ерекше емес матрица.

Шынында да,

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{d(\Phi C)}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}C$$

Ал $\Phi(t)$ матрицасы (18) матрицалық теңдеуді қанағаттандыратындықтан,

$$\frac{d(\Phi C)}{dt} = (P\Phi)C = P(\Phi C)$$

тепе-теңдігін аламыз, яғни $\Psi(t) = \Phi(t)C$ матрицасы да (18) матрицалық теңдеуді қанағаттандырады. Оның үстіне

$$\det\Psi(t) = \det\Phi(t) \cdot \det C \neq 0$$

**2.4.** Лиувилль формуласын келтірейік.

Алдымен, $n$-ші ретті анықтауыштың туындысы қалай ашылатынын көрсетейік.

$n$-ші ретті анықтауыштың туындысы сол анықтауыштың әр бағанасы (немесе әр жатық жолы) кезекпен туындыларымен ауыстырылған $n$ анықтауыштардың қосындысынан тұрады. Осы ереже бойынша вронскианның туындысын ашайық:

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \varphi_{11} \dots \dot{\varphi}_{1i} \dots \varphi_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{j1} \dots \dot{\varphi}_{ji} \dots \varphi_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{n1} \dots \dot{\varphi}_{ni} \dots \varphi_{nn} \end{vmatrix} \tag{24}$$

Мұндағы, $\varphi_{ji}$ берілген жүйенің шешімі болғандықтан,

$$\dot{\varphi}_{ji}(t) = \sum_{k=1}^{n} p_{jk}(t)\varphi_{ki}(t), \ (i, j = 1,\dots,n)$$

Осы өрнектерді анықтауыштың $i$-нші бағанасына қойсақ, анықтауыштың қасиеттері бойынша, $k = j$ болатын қосындыдан басқа анықтауыштардың бәрі нөлге тең болады, өйткені олардың екі бағанасы өзара пропорционал болады. Сондықтан,

$$\dot{W}(t) = \sum_{j=1}^{n} p_{jj}(t)W(t)$$

Осыдан

$$W(t)=W(t_0)e^{\int\limits_{t_0}^{t} trP(t)dt} \qquad (25)$$

Мұндағы, $trP(t)=\sum\limits_{j=1}^{n} p_{jj}(t)$ - берілген $P(t)$ матрицасының ізі деп аталады.

Осы (25) теңдікті Лиувилль формуласы деп атайды. Бұл формуладан мынандай қорытынды шығады: егер $\langle a,b\rangle$ аралығының бір нүктесінде вронскиан нөлге тең болса, ол бүкіл аралықта нөлге тең болады, ал $\langle a,b\rangle$ аралығының бір нүктесінде нөлге тең болмаса, онда ол бүкіл аралықта нөлге тең болмайды.

**2.5.** Айталық, $\Phi(t)$ - фундаменталь матрица болсын.
$\Phi^{-1}(t)\Phi(t)=E$ тепе-теңдігін дифференциалдайық:

$$\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}\Phi)=\frac{d\Phi^{-1}}{dt}\Phi+\Phi^{-1}\frac{d\Phi}{dt}=0$$

Осыдан

$$\frac{d\Phi^{-1}}{dt}=-\Phi^{-1}\frac{d\Phi}{dt}\Phi^{-1}=-\Phi^{-1}P\Phi\Phi^{-1}=-\Phi^{-1}P$$

немесе

$$\frac{d\Phi^{-1}}{dt}=-\Phi^{-1}P$$

Соңғы қатынастағы матрицаларды аударсақ,

$$\frac{d(\Phi^{-1})^T}{dt} = -P^T(\Phi^{-1})^T$$

теңдігін аламыз. Бұдан шығатын қорытынды, $\Psi(t) = (\Phi^{-1})^T$ матрицасы

$$\frac{dy}{dt} = -P(t)y \tag{27}$$

теңдеуінің фундаменталь матрицасы болатынын көреміз. Осы (27) жүйені берілген (1) жүйенің түйіндесі деп атайды. Егер $\Psi_1(t)$ осы жүйенің кейбір фундаменталь матрицасы болса, онда

$$\Psi_1(t) = (\Phi^{-1})^T C$$

қатынасы орын алады. Мұнда $C$ -ерекше емес матрица. Осыдан

$$\Psi_1^T(t) = C^T \Phi^{-1}$$

немесе

$$\Psi_1^T(t)\Phi(t) = C^T = B$$

Соңғы теңдіктен мынаны көреміз: $\Psi_1^T(t)$- матрицасының жатық жолы (27) жүйенің шешімдері болатынын, $\Phi(t)$ матрицасының бағаналары (1) жүйенің шешімдері болатыны, ал олардың көбейтіндісі тұрақты екенін көреміз.

**Қолданылған әдебиеттер:**


1. Мырзалыұлы Ж. Дифференциалдық теңдеулер: оқу құралы. – Алматы: Қазақ университеті баспасы, – 2006ж., 148 бет.
2. Сүлеймен Ж. Дифференциалдық теңдеулер курсы: оқулық. – Алматы: Қазақ университеті, – 2009. - 440 бет.
3. Мұхтаров М., Исмағұлова Н.М. Дифференциалдық теңдеулер бойынша дәрістер: оқу құралы. – Павлодар: Кереку, – 2015. - 410 бет.