

12-дәріс. Тұрақты коэффициентті 2-ретті сызықты біртектісін дифференциалдық теңдеулер. Арнайы оң жағы бар (квазикөпмүшелік) сызықты дифференциалдық теңдеулер.

Дәріс мақсаты: Тұрақты коэффициентті арнайы оң жағы бар 2-ретті сызықты біртектісін дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімінің түрін анықтауды, жалпы шешімін табуды үйрету.

Келесі түрдегі 2-ретті сызықты біртектісін теңдеуді қарастырайық:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (f(x) \neq 0) \quad (1)$$

Сызықты біртектісін теңдеудің жалпы шешімінің құрылымы

$y(x)$ – (1) теңдеудің қандай да бір дербес шешімі болсын, яғни келесі теңдеуді орындалсын:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y \equiv f(x).$$

(1) сызықты біртектісін теңдеудің жалпы шешімі келесі түрге ие:

$$y(x) = y_0(x) + y(x), \quad (2)$$

мұндағы $y_0(x)$ – келесі сәйкес біртектісін теңдеудің жалпы шешімі:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (3)$$

ал $y(x)$ – (1) сызықты біртектісін теңдеудің дербес шешімі.

(1) сызықты біртектісін теңдеудегі $p(x), q(x)$ функциялары тұрақты шама болсын. Онда осы теңдеудің қандай да бір нақты оң жағы үшін дербес шешімнің түрі алдын-ала белгілі және оны анықтау үшін тұрақтыны вариациялау әдісі қажеттілігі жоқ.

Оң жағы арнайы түрде келетін (1) теңдеудің түрлерін қарастырайық:

1. Сызықты біртектісін (1) теңдеу

$$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\lambda x}, \quad (4)$$

мұндағы

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

– n дәрежелі көпмүшелік, ал λ – нақты сан.

(4) теңдеуге $y'' + py' + qy = 0$ біртекті теңдеуі сәйкес келеді, оның сипаттаушы теңдеуі

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (5)$$

Теорема (дәлелдеусіз).

(4) теңдеуінің $y(x)$ дербес шешімі келесі түрге ие:

$$y(x) = \begin{cases} Q_n(x)e^{\lambda x}, & \text{егер } \lambda - (5) \text{ тубірі болмаса;} \\ xQ(x)e^{\lambda x}, & \text{егер } \lambda - (5) \text{ тубірі болса;} \\ x^2Q(x)e^{\lambda x}, & \text{егер } \lambda - (5) \text{ еселі тубірі болса.} \end{cases}$$

мұндағы $Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n$ ($b_0 \neq 0$) көпмүшелігі анықтауға қажет b_i ($i = \overline{0, n}$) коэффициентті $P_n(x)$ көпмүшелігінің дәрежесіндегі n дәрежелі көпмүшелік.

$Q_n(x)$ көпмүшелігінің b_i ($i = \overline{0, n}$) коэффициенттері $y(x)$ функциясы (4) теңдеуін қанағаттандыратындай болуы керек, сондықтан оларды табу үшін төменде сипатталған алгоритм қолданылады.

Теорема көмегімен $y(x)$ дербес шешімінің түрі анықталады. Одан кейін оның бірінші $y'(x)$ және екінші ретті $y''(x)$ туындылары табылады. $y(x)$ шешімі және оның әзірге белгісіз коэффициенттерімен туындылары (4) теңдеуге қойылып, теңдеудің екі жағы да $e^{\lambda x}$ дәрежесіне қысқартылады. Ары қарай, алынған теңдіктің сол және оң жағында тұрған екі көпмүшеліктің тепе-теңдігінен b_i ($i = \overline{0, n}$) коэффициенттерін анықтаймыз.

Мысал 1. Төмендегі теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$y'' + 4y' - 5y = (x + 3)e^x.$$

Шешуі: теңдеудің жалпы шешімін $y(x) = y_0(x) + y(x)$ түрінде іздейміз. Теңдеуге келесі біртекті теңдеу сәйкес:

$$y'' + 4y' - 5y = 0.$$

Оның сипаттаушы

$$k^2 + 4k - 5 = 0$$

теңдеуінің түбірлері: $k_1=1$, $k_2=-5$. Сонда біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі мына түрде болады:

$$y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}.$$

Енді берілген теңдеудің оң жағына келейік. Мұнда $\lambda=1$, $P_n(x) = x+3$, сондықтан $n=1$. $\lambda = k_1$ болғандықтан, теңдеудің дербес шешімін келесі түрде іздейміз:

$$\tilde{y}(x) = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x,$$

мұндағы A және B коэффициенттері анықталуы тиіс белгісіз сандар. Оларды анықтау үшін $y(x)$ және оның туындыларын бастапқы теңдеуге апарып қоямыз. Мұнда $y''(x)$ есептеу кезінде $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$.

Сонымен,

$$\begin{aligned}\tilde{y}(x) &= (Ax^2 + Bx)e^x, \\ \tilde{y}'(x) &= (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x, \\ \tilde{y}''(x) &= 2Ae^x + 2(2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x,\end{aligned}$$

және берілген теңдеудің сол жағы келесі түрге ие болады:

$$\begin{aligned}\tilde{y}''(x) + 4\tilde{y}'(x) - 5\tilde{y}(x) &= \\ = e^x \{ (Ax^2 + Bx)(1 + 4 - 5) + (2Ax + B)(2 + 4) + 2A \} &= \\ = \{ 6(2Ax + B) + 2A \} e^x.\end{aligned}$$

A және B коэффициенттері бастапқы теңдеудің екі жағы бір біріне тепе-тең болатындай болуы керек, яғни

$$12Ax + (6B + 2A) \equiv x + 3.$$

Мұндағы тепе-теңдік сонда тек сонда ғана орындалады, егер теңдеудің сол және оң жағында x -тің бірдей дәрежесіндегі коэффициенттер тұрғанда:

$$\begin{cases} 12A = 1; \\ 6B + 2A = 3. \end{cases}$$

Сонымен,

$$A = \frac{1}{12}, B = \frac{17}{36}, \text{ а } \tilde{y}(x) = \left(\frac{x^2}{12} + \frac{17}{36}x \right) e^x.$$

Осылайша, бастапқы теңдеудің жалпы шешімі:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} + \left(\frac{x^2}{12} + \frac{17}{36}x \right) e^x.$$

Мысал 2. Коши есебін шешіңіз:

$$y'' + 4y' + 8y = 5x + 2,$$

$$y|_{x=0} = 1; \quad y'|_{x=0} = -1.$$

Шешуі: Коши есебінің шешімін табу үшін, алдымен теңдеудің жалпы шешімін $y(x) = y_0(x) + y(x)$ түрінде тауып, бастапқы шарттар орындалатындай еркін тұрақтыларды анықтау қажет.

Біртекті теңдеуге

$$y'' + 4y' + 8y = 0$$

біртекті теңдеуі сәйкес келеді, оның сипаттаушы теңдеуі:

$$k^2 + 4k + 8 = 0.$$

Сипаттаушы теңдеудің нақты түбірлері жоқ: $k_{1,2} = -2 \pm 2i$. Бұл жағдайда $\alpha = -2$, $\beta = 2$, және сонымен, біртекті теңдеудің жалпы шешімінің түрі келесідей болады:

$$y_0(x) = C_1 e^{-2x} \sin 2x + C_2 e^{-2x} \cos 2x.$$

Енді берілген теңдеудің оң жағына сәйкес, $y(x)$ дербес шешімін таңдайық. Мұндағы $n = 1$, $\lambda = 0$. Теңдеудің дербес шешімін мына түрде іздейміз:

$$\tilde{y}(x) = Ax + B.$$

Онда

$$\tilde{y}'(x) = A, \quad \tilde{y}''(x) = 0$$

және

$$y'' + 4y' + 8y = 4A + 8(Ax + B).$$

Келесі тепе-теңдік орындалатындықтан

$$8Ax + 4A + 8B = 5x + 2.$$

$$\begin{cases} 8A = 5; \\ 4A + 8B = 2 \end{cases}$$

жүйесі орындалады.

Осыдан

$$A = \frac{5}{8}, \quad B = -\frac{1}{16}$$

аламыз. Сонымен, теңдеудің жалпы шешімі:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} \sin 2x + C_2 e^{-2x} \cos 2x + \frac{5}{8}x - \frac{1}{16}.$$

Бірінші бастапқы шартты ескереміз:

$$1 = y(0) = C_2 - \frac{1}{16}.$$

Бұдан

$$C_2 = \frac{17}{16}.$$

Тұрақты мәнінің ескерілуімен, жалпы шешімді дифференциалдаймыз:

$$y'(x) = -2C_1 e^{-2x} \sin 2x + 2C_1 e^{-2x} \cos 2x - \\ - \frac{17}{8} e^{-2x} \cos 2x - \frac{17}{8} e^{-2x} \sin 2x + \frac{5}{8}.$$

Бастапқы шарттың екіншісінің ескерілуімен

$$-1 = y'(0) = 2C_1 - \frac{17}{8} + \frac{5}{8}$$

немесе

$$C_1 = \frac{1}{4}.$$

Сонымен, Коши есебінің шешімі:

$$y(x) = e^{-2x} \left(\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{17}{16} \cos 2x \right) + \frac{5}{8}x - \frac{1}{16}.$$

Әдебиет:

1. Көлекеев К. Д., Назарова К. Ж. Дифференциалдық теңдеулер: Оқулығы. – Алматы: Дәуір, 2012. - 216 бет.
2. Мұхтаров М., Исмағұлова Н.М. Дифференциалдық теңдеулер бойынша дәрістер: оқу құралы. – Павлодар: Кереку, 2015. - 410 бет.
3. Сүлеймен Ж. Дифференциалдық теңдеулер курсы: оқулық. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. - 440 бет.
4. Шипачев В.С. Высшая математика. Москва. “Высшая школа” 1989г.