

11-дәріс. Тұрақты коэффициентті сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер. Эйлер әдісі. Сипаттауыш теңдеу және сандар

Дәріс мақсаты: Тұрақты коэффициентті теңдеулердің фундаментальшешімдерін табу әдістерімен таныстыру. Тұрақты коэффициентті дифференциалдық теңдеулерді Эйлер әдісімен шешу.

Алдымен біртекті теңдеуді қарастырайық:

$$Ly = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (1)$$

мұндағы a_i – тұрақты сандар.

Бұл теңдеудің шешімін Эйлер әдісі бойынша

$$y = e^{\lambda x}$$

түрінде іздейміз, мұндағы λ – белгісіз тұрақты сан. Осы өрнекті (1) теңдеудің сол жағына қойсақ,

$$L[e^{\lambda x}] = \lambda^n e^{\lambda x} + \lambda^{n-1} a_1 e^{\lambda x} + \dots + a_n e^{\lambda x} = P(\lambda) e^{\lambda x} \quad (3)$$

қатынасын аламыз, мұндағы

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n. \quad (4)$$

(3) қатынастан $e^{\lambda x}$ функциясы теңдеудің шешімі болу үшін λ санының $P(\lambda) = 0$ теңдеулерінің шешімі болуы керек екенін көреміз, яғни

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (5)$$

Соңғы теңдеуді сипаттаушы теңдеу деп, ал оның түбірлерін сипаттаушы сандар деп атайды.

Сипаттауыш сандардың түрлеріне байланысты фундаменталь шешімдер жүйесі әртүрлі болады. Сол жағдайларды қарастырайық.

1-жағдай. Сипаттаушы $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ сандары әртүрлі нақты сандар болсын.

Бұл сандарды кезекпен (2) қатынасқа қойып, n дербес шешім табамыз:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x} \quad (6)$$

Олардың сызықты тәуелсіздігін көрсету үшін Вронский анықтауышын құрайық:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Теңдіктің оң жағындағы анықтауыш Вандермонд анықтауышы деп аталады. Ол $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ сандары әртүрлі болғанда нөлге айналмайды, яғни $W(x) \neq 0$. Сондықтан (6) функциялар жиыны берілген теңдеудің фундаментал шешімдер жүйесін құрайды. Бұл жағдайда жалпы шешім

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \quad (7)$$

түрінде жазылады. Мұндағы $C_1, \dots, C_n$ – еркін тұрақтылар.

2-жағдай. Сипаттаушы сандардың ішінде комплекс сандар кездессін. Айталық, $\lambda_1 = a + ib$ – сипаттаушы теңдеудің жай түбірі болсын. Онда оның түйіндесі $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = a - ib$ саны да сол теңдеудің түбірі болады. Бұл жағдайда $a + ib$ түбіріне сәйкес шешім

$$y_1 = e^{(a+ib)x} \quad (8)$$

түрінде жазылады. Бұл комплексті функция. Сызықты теңдеу шешімдерінің қасиеті бойынша оның нақты және жорамал бөліктері өз алдына берілген теңдеудің шешімдері болады. Сондықтан,

$$y_{11} = \operatorname{Re} y_1 = e^{ax} \cos bx, \quad y_{12} = \operatorname{Im} y_1 = e^{ax} \sin bx \quad (9)$$

функциялары (1) теңдеудің шешімдері болады және олар өзара сызықты тәуелсіз. Ал $\bar{\lambda}_1 = a - ib$ түбіріне сәйкес шешім де сол өзара тәуелсіз екі функцияны береді:

$$e^{ax} \cos bx, \quad -e^{ax} \sin bx \quad (10)$$

Бұлардың біріншісі, алдыңғымен бірдей, екіншісі тек таңбамен өзгеше, яғни (9) және (10) функциялар өзара сызықты тәуелді. Сондықтан, өзара түйіндес комплекс түбір үшін (9) түріндегі екі нақты функция алынады. Осы сияқты, кез келген қос комплексті түбір үшін екі нақты функциялар алынып отырады. Оларға қоса нақты түбірлерге сәйкес қойылатын шешімдерді алсақ, олардың жиыны берілген теңдеудің фундаменталь шешімдер жүйесін құрайды.

3-жағдай. Сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің кейбіреулері еселі түбір болсын.

Айталық, λ_1 саны сипаттаушы теңдеудің k -еселі түбірі болсын. Бұл жағдайда

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = \dots = P^{(k-1)}(\lambda_1) = 0, \quad P^{(k)}(\lambda_1) \neq 0 \quad (11)$$

шарттары орындалады.

$$L[e^{\lambda x}] = P(\lambda)e^{\lambda x}$$

тепе-теңдігін λ бойынша m рет дифференциалдайық:

$$L[\lambda^m e^{\lambda x}] = \sum_{v=0}^m C_m^v P^{(v)}(\lambda) x^{m-v} e^{\lambda x}. \quad (12)$$

Осыдан (11) шартты ескерсек:

$$L[\lambda^m e^{\lambda_1 x}] \equiv 0, \quad m = 0, 1, \dots, k-1$$

болатынын көреміз, яғни

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x} \quad (13)$$

функцияларының (1) теңдеуінің шешімдері болатынын көреміз. Бұл шешімдердің де өзара сызықты тәуелсіз екенін көрсету қиын емес. Мұнда, λ_1 нақты сан болса, онда (13) функциялары да нақты функциялар болады.

Егер сипаттаушы теңдеудің комплексті $\lambda_1 = a + ib$ түбірі k -еселі түбір болса, оның түйіндесі $\bar{\lambda}_1 = a - ib$ түбірі де k -еселі болады. Бұл жағдайда да алдыңғы (13) шешімдер сияқты төмендегідей k шешім аламыз:

$$e^{(a+ib)x}, x e^{(a+ib)x}, \dots, x^{k-1} e^{(a+ib)x} \quad (14)$$

Осы комплексті функциялардың нақты және жорамал бөліктерін ажыратсақ, онда $2k$ нақты функциялардың жиынын аламыз:

$$e^{ax} \cos bx, x e^{ax} \cos bx, \dots, x^{k-1} e^{ax} \cos bx, \\ e^{ax} \sin bx, x e^{ax} \sin bx, \dots, x^{k-1} e^{ax} \sin bx. \quad (15)$$

Бұл функциялардың да сызықты тәуелсіздігін дәлелдеу қиын емес. Түйіндес $a - ib$ түбірі жаңа тәуелсіз шешімдер тудырмайды.

Сонымен, әрбір нақты, комплексті, еселі түбірлерге сәйкес қойылатын шешімдерді есептесек, барлығы n нақты шешімдер аламыз. Олардың сызықты комбинациясы берілген теңдеудің жалпы шешімдерін береді.

Мысал. Келесі теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 8y''' + 8y'' + 4y' = 0.$$

Шешуі: Сипаттаушы теңдеуі:

$$\lambda^5 + 4\lambda^4 + 8\lambda^3 + 8\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

немесе

$$\lambda \cdot (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0.$$

Оның түбірлері

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = -1 \pm i, \lambda_5 = 0.$$

Онда фундаментальды шешімдер жүйесі келесі функциялардан тұрады:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-x} \cos x, & y_2 &= x e^{-x} \cos x, \\ y_3 &= e^{-x} \sin x, & y_4 &= x e^{-x} \sin x, \\ y_5 &= e^{0 \cdot x} = 1. \end{aligned}$$

Сонымен, теңдеудің жалпы шешімі

$$y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x) + C_5.$$

түрінде жазылады.

Әдебиет

1. Көлекеев К. Д., Назарова К. Ж. Дифференциалдық теңдеулер: Оқулығы. – Алматы: Дәуір, 2012. - 216 бет.
2. Мұхтаров М., Исмағұлова Н.М. Дифференциалдық теңдеулер бойынша дәрістер: оқу құралы. – Павлодар: Кереку, 2015. - 410 бет.
3. Сүлеймен Ж. Дифференциалдық теңдеулер курсы: оқулық. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. - 440 бет.
4. Шипачев В.С. Высшая математика. Москва. “Высшая школа” 1989г.