

10-дәріс. Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер. Сызықты біртектісіз дифференциалдық теңдеулер. Тұрақтыларды вариациялау (Лагранж) әдісі

Дәріс мақсаты: n -ретті сызықты біртектісіз дифференциалды теңдеуді шешу жолдарын қарастыру. Аталған теңдеудің жалпы шешімін табу біліктілігін қалыптастыру.

n -ші ретті сызықты біртектісіз теңдеуді қарастырайық:

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (1)$$

мұндағы $f(x)$ – I интервалында үзіліссіз функция. Ыңғайлылық үшін жоғарғы ретті туындының коэффициентін 1-ге тең деп аламыз. (1) теңдеу n -ші ретті сызықты біртектісіз теңдеу ($f(x)$ функциясы теңдеудің бос мүшесі деп аталады) болып табылады. Сызықты біртекті

$$Ly \equiv a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (2)$$

теңдеуін кейде (1) теңдеуі үшін сәйкес біртекті теңдеу деп атайды. Егер (2) сәйкес біртекті теңдеудің

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (3)$$

шешімі және (1) теңдеудің қандай да бір y дербес шешімі белгілі болса, онда (1) теңдеудің жалпы шешімі $y = y_0 + u$ формуласымен беріледі. (1) теңдеудің дербес шешімін табу үшін шешімдердің қосындысы туралы теореманы қолдану ыңғайлы; ол теорема бойынша (1) теңдеудің оң жағын қарапайым түрдегі функциялардың қосындысы түрінде жазып, $Ly = f_k(x)$, $k=1, \dots, m$ теңдеулерінің сәйкесінше, y_k дербес шешімдерін табады. Онда $y = y_1 + y_2 + \dots + y_m$ (1) теңдеуінің $f(x)$ оң жағы бар шешімі болады.

Егер (1) теңдеудің шешімін табу мүмкін болмаса, алайда сәйкес (2) біртекті теңдеудің шешімі (фундаменталді шешімдер жүйесі) белгілі болса, онда біртектісіз (1) теңдеудің шешімін тұрақтыны вариациялау немесе Лагранждың анықталмаған көбейткіштері әдісімен табуға болады. Аталған әдістің мәні – біртектісіз (1) теңдеудің шешімі біртекті теңдеудің шешімі (3) түрінде ізделінеді, бірақ C_i , $i=1, \dots, n$ коэффициенттері тұрақты шамалар емес, анықталмаған $C_i = C_i(x)$, $i=1, \dots, n$ функциялары болып саналады. Бұл функцияларды олардың $C'_i(x)$ туындыларына қатысты теңдеулердің алгебралық жүйесін шешу арқылы табуға болады:

$$\begin{aligned}
C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n &= 0, \\
C_1' y_1' + C_2' y_2' + \dots + C_n' y_n' &= 0, \\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \dots + C_n' y_n^{(n-2)} &= 0, \\
C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} &= f(x).
\end{aligned} \tag{4}$$

Бұл жүйенің анықтауышы – I интервалында нөлге айналмайтын $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ фундаменталді шешімдер жүйесінің Вронский анықтауышы болып табылады. Сондықтан (4) жүйенің жалғыз шешімі

$C_i'(x) = \phi_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ бар. Осыдан $C_i(x) = \int_{x_0}^x \phi_i(x) dx + C_i$, $i = 1, \dots, n$ аламыз,

мұндағы C_i , $i = 1, \dots, n$ – кез келген интегралдау тұрақтылары. Алынған мәндерді (3)-ке қоя отырып, (1) теңдеудің жалпы шешімін келесі түрде жазамыз:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + y_1 \cdot \int_{x_0}^x \phi_1(x) dx + y_2 \cdot \int_{x_0}^x \phi_2(x) dx + \dots + y_n \cdot \int_{x_0}^x \phi_n(x) dx. \tag{5}$$

(5) формулада алғашқы n қосылғыш (2) теңдеудің жалпы шешімі, ал қалған қосынды (1) теңдеудің дербес шешімі (жалпы шешімнен $C_i = 0$, $i = 1, \dots, n$ деген ұйғарымнан шығады). Алайда, тұрақтыларды вариациялау әдісін негіздемесі кезінде ең жоғарғы ретті туындының $a_0(x)$ коэффициенті 1-ге тең деп саналады. Егер бұл шарт орындалмаса, онда (4) жүйенің соңғы теңдеуінде $f(x)$ функциясын $f(x)/a_0(x)$ алмастыру қажет.

Мысал: Келесі теңдеуді шешіңіз:

$$y'' + y = x - \sin 2x.$$

Шешуі:

1) Алдымен

$$y'' + y = 0.$$

біртекті теңдеуін шешеміз:

$$k^2 + 1 = 0; \quad k_1 = i; \quad k_2 = -i.$$

$$y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x); \quad \alpha = 0; \quad \beta = 1,$$

$$y = A \cos x + B \sin x;$$

2) біртекті емес теңдеудің шешімі келесі түрде болады:

$$y = A(x) \cos x + B(x) \sin x;$$

Теңдеулер жүйесін құрастырамыз:

$$\begin{cases} A'(x) \cos x + B'(x) \sin x = 0 \\ -A'(x) \sin x + B'(x) \cos x = x - \sin 2x \end{cases}$$

Жүйені шешейік:

$$\begin{cases} B'(x) = -A'(x) \frac{\cos x}{\sin x} \\ -A'(x) \sin x - A'(x) \frac{\cos^2 x}{\sin x} = x - \sin 2x \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{-A'(x)}{\sin x} = x - \sin 2x \\ B'(x) = \cos x (x - \sin 2x) \end{cases}$$

$A'(x) = 2 \sin^2 x \cos x - x \sin x$ өрнегінен $A(x)$ функциясын табамыз.

$$\begin{aligned} A(x) &= \int (2 \sin^2 x \cos x - x \sin x) dx = 2 \int \sin^2 x \cos x dx - \int x \sin x dx = \frac{2}{3} \sin^3 x - \int x \sin x dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \sin x dx, \\ du = dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = \frac{2}{3} \sin^3 x + x \cos x - \int \cos x dx = \frac{2}{3} \sin^3 x + x \cos x - \sin x + C_1. \end{aligned}$$

Енді $B(x)$ функциясын табайық.

$$\begin{aligned} B(x) &= \int x \cos x dx - 2 \int \cos^2 x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \cos x dx, \\ du = dx, \quad v = \sin x, \end{array} \right\} = x \sin x - \int \sin x dx + \frac{2}{3} \cos^3 x = \\ &= \frac{2}{3} \cos^3 x + x \sin x + \cos x + C_2. \end{aligned}$$

Табылған мәндерді біртекті емес теңдеудің шешімінің формуласына қоямыз:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{3} \sin^3 x \cos x + x \cos^2 x - \sin x \cos x + C_1 \cos x + \frac{2}{3} \sin x \cos^3 x + x \sin^2 x + \sin x \cos x + C_2 \sin x = \\ &= \frac{2}{3} \sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) + x (\sin^2 x + \cos^2 x) + C_1 \cos x + C_2 \sin x. \end{aligned}$$

Жауабы: $y = \frac{1}{3} \sin 2x + x + C_1 \cos x + C_2 \sin x;$

Сөйтіп, сызықты біртекті теңдеудің жалпы шешімін дара шешімін таппастан жаздық.

Әдебиет

1. Көлекеев К. Д., Назарова К. Ж. Дифференциалдық теңдеулер: Оқулығы. – Алматы: Дәуір, 2012. - 216 бет.
2. Мұхтаров М., Исмағұлова Н.М. Дифференциалдық теңдеулер бойынша дәрістер: оқу құралы. – Павлодар: Кереку, 2015. - 410 бет.
3. Киясов С.Н., Шурыгин В.В. Дифференциальные уравнения. Основы теории, методы решения задач: учебное пособие. – Казань: Казанский Федеральный университет 2011. - 112 бет.
4. Шипачев В.С. Высшая математика. Москва. “Высшая школа” 1989г.