

**9-дәріс. Жоғары ретті дифференциалдық
теңдеулер. Сызықты біртекті
дифференциалдық теңдеулер. Вронский
анықтауышы.**

аға оқытушы, PhD

Бекенаева К.С.

Дәріс жоспары:

1. Жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер, олардың қасиеттері.
2. Сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер.
3. Функциялардың сызықты тәуелділігі. Вронский анықтауышы.
4. Фундаменталь шешімдер жүйесі.

Дәріс мақсаты: Жоғарғы ретті сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер ұғымын енгізу. Вронский анықтауышының түсінігімен таныстыру, функциялардың сызықты тәуелділігін анықтауды үйрету. Фундаменталь шешімдер жүйесін анықтау.

n -ретті сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер. Вронский анықтауышы

n - ретті сызықты теңдеулер

3.1. Жоғарғы ретті теңдеулердің ең қарапайымы және оңай зерттелетіні – сызықты теңдеулер.

Белгісіз функция мен оның туындыларын сызықты түрде байланыстыратын теңдеулерді сызықты теңдеулер деп татйды.

n - ретті сызықты теңдеудің жалпы түрі былай жазылады:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = q(x)$$

Мұндағы, $a_i(x)$ ($i=0, \dots, n$), $q(x)$ - функциялары кейбір $\langle a, b \rangle$ аралығында анықталған нақты үздіксіз функциялар.

Егер $a_0(x) \neq 0, \forall x \in \langle a, b \rangle$ болса, онда соған бөлу арқылы

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x) \tag{1}$$

теңдеуін аламыз. Соңғы түрдегі теңдеуді теңдеудің келтірілген, не қалыпты түрі деп атайды. Мұндағы, $f(x)$ функциясы бос мүше деп аталынады. Егер ол нөлге тең болмаса,

(1) теңдеу біртексіз сызықты теңдеу деп, ал нөлге тең болса, біртекті сызықты теңдеу деп аталынады. (1) теңдеудің сәйкес біртектісі былай жазылады:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (2)$$

Әдетте, (1) теңдеудің сол жағын қысқартып, былай белгілейді:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y \quad (3)$$

Сонда (1) және (2) теңдеулерді былай жазуға болады:

$$L[y] = f(x)$$

және

$$L[y] = 0$$

Енгізілген (3) өрнекті сызықты дифференциалдық оператор деп атайды. Бұл оператор дифференциалдау амалының сызықтығынан шығатын төмендегідей екі шартты қанағаттандырады:

$$1^0. \quad L[Cy] = CL[y]$$

$$2^0. \quad L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$$

Бұлардың салдары ретінде тағы бір қатынасты жазуға болады:

$$3^0. \quad L\left[\sum_{i=1}^m C_i y_i\right] = \sum_{i=1}^m C_i L[y_i]$$

Бұл шарттар дифференциалдық оператордың сызықтығын білдіреді.

3.2. Сызықты теңдеулердің ортақ екі қасиетін келтірейік.

I^0 . Тәуелсіз айнымалыны кейбір $\langle c, d \rangle$ аралығында анықталған n рет үздіксіз дифференциалданатын, бірінші туындысы нөлге тең емес функция арқылы жаңа тәуелсіз айнымалымен алмастырғаннан теңдеудің сызықтығы өзгермейді.

Шынында да, $x = \varphi(\tau)$, $\varphi'(\tau) \neq 0$, $\forall \tau \in \langle c, d \rangle$ алмастыруын жасайық. Сонда

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{\varphi'(\tau)} \frac{dy}{d\tau}, \\ y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{d\tau} \frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{\varphi'(\tau)} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\varphi'(\tau)} \frac{dy}{d\tau} \right) = \\ &= \frac{1}{\varphi'(\tau)} \left(\frac{1}{\varphi'(\tau)} \frac{d^2 y}{d\tau^2} - \frac{\varphi''(\tau)}{\varphi'^2(\tau)} \frac{dy}{d\tau} \right) \end{aligned}$$

Осылай кез келген $y^{(k)}$ -ның сызықты түрде $\frac{dy}{d\tau}, \frac{d^2 y}{d\tau^2}, \dots, \frac{d^k y}{d\tau^k}$ арқылы өрнектелетінін көреміз. Осы қатынастарды (1) және (2) теңдеулерге апарып қойсақ, қайтадан сызықты теңдеулер аламыз.

2^o. Белгісіз функцияны басқа бір функциямен сызықты түрде алмастырғаннан теңдеудің сызықтығы өзгермейді.

Шынында да, айталық, $y = \alpha(x)z + \beta(x), \alpha(x) \neq 0$ түрінде алмастыру жасалсын. Мұндағы, $\alpha(x)$ және $\beta(x)$ функциялары $\langle a, b \rangle$ аралығында анықталған n рет үздіксіз дифференциалданатын функциялар болсын.

Сонда

$$y' = \alpha(x)z' + \alpha'(x)z + \beta'(x),$$

$$y'' = \alpha(x)z'' + 2\alpha'(x)z' + \alpha''(x)z + \beta''(x),$$

.....

$$y^{(n)} = \alpha(x)z^{(n)} + n\alpha'(x)z^{(n-1)} + \dots + \alpha^{(n)}(x)z + \beta^{(n)}(x)$$

Осы туындыларды (1) теңдеуге апарып қойсақ, қайтадан біртекті сызықты теңдеу аламыз.

Ал (2) теңдеуге апарып қойсақ, онда біртекті теңдеуіміз біртектісіз сызықты теңдеуге айналады. Біртектілікті сақтау үшін $y = \alpha(x)z$ түріндегі біртекті алмастыру алу керек.

Сызықты теңдеулердің бір ерекшелігі – олардың бастапқы шартты қанағаттандыратын шешімі бар болу үшін бір-ақ шарттың орындалуы жеткілікті.

Дәлірек айтсақ, мынандай тұжырым орын алады.

Теорема-1. Егер сызықты теңдеудің коэффициенттері мен бос мүшесі кейбір $\langle a, b \rangle$ аралығында анықталған үздіксіз функциялар болса, онда оның бастапқы шартты қанағаттандыратын жалғыз ғана шешімі болады және ол шешім $\langle a, b \rangle$ аралығының өн бойында анықталады.

Біртекті сызықты теңдеулер

4.1. Біртекті сызықты теңдеудің шешімдерінің қасиеттерін келтірейік. Коэффициенттері кейбір $\langle a, b \rangle$ аралығында үздіксіз болып келетін мына n -ретті теңдеуді қарастырайық:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (1)$$

Ең алдымен ескеретін жәй – біртекті сызықты теңдеудің барлық жағдайда нольдік шешімі бар. Ол шешім

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad (2)$$

бастапқы шартты қанағаттандыратын Коши есебінің шешімі: $y(x) = 0$. Бұл шешім жалғыз.

Теорема-1. Егер $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ функциялары (1) теңдеудің $\langle a, b \rangle$ аралығындағы шешімдері болса, онда олардың сызықты комбинациясы

$$\varphi(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_m \varphi_m(x) \quad (3)$$

сол теңдеудің $\langle a, b \rangle$ аралығындағы шешімі болады.

Дәлелдеуі. Шарт бойынша әрбір $\varphi_i(x)$ шешім:

$$L[\varphi_i(x)] = 0 \quad (i = 1, \dots, m), \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$$

Енді сызықты дифференциалдық оператордың қасиетін пайдалансақ, онда

$$L\left[\sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i(x)\right] = \sum_{i=1}^m \alpha_i L[\varphi_i(x)] = 0, \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$$

Теорема-2. Егер (1) теңдеудің $\varphi(x) = u(x) + iv(x)$ түріндегі комплекс шешімі бар болса, онда оның нақты және жорамал бөліктері өз алдына сол теңдеудің шешімдерін береді.

Дәлелдеуі. Шарт бойынша

$$L[\varphi(x)] = L[u(x) + iv(x)] = 0, \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$$

оператордың қасиеті бойынша

$$L[u(x) + iv(x)] = L[u(x)] + iL[v(x)] = 0$$

Осыдан $L[u(x)] = 0, L[v(x)] = 0, \forall x \in \langle a, b \rangle$.

Анықтама-1. Егер $\langle a, b \rangle$ аралығында анықталған

$\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ функциялары үшін бәрі бірдей нөлге тең емес $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ сандары табылып,

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_m \varphi_m(x) = 0, \quad \forall x \in \langle a, b \rangle \quad (4)$$

теңдігі орындалса, онда берілген функциялар жиыны $\langle a, b \rangle$ аралығында сызықты тәуелді деп аталынады, ал (4) теңдік $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ сандарының тек нөлдік мәндерінде ғана орындалса, онда берілген функциялар жиыны $\langle a, b \rangle$ аралығында сызықты тәуелсіз деп аталады.

4.2. Айталық, $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ функциялары (1) теңдеудің $\langle a, b \rangle$ аралығында анықталған нақты шешімдері болсын. Осы функциялар мен олардың туындыларынан құрылған төмендегідей n ретті анықтауыш

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W[\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] \quad (5)$$

Вронский анықтауышы деп аталады. Қысқаша, оны функциялардың вронскианы дейді. Бұл анықтауышты қысқаша, $W(x)$ деп белгілейді.

Теорема-3. Егер $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ шешімдері $\langle a, b \rangle$ аралығында сызықты тәуелді болса, онда олардың вронскианы осы аралықта нөлге тепе-тең.

Дәлелдеуі. Анықтама бойынша бәрі бірдей нөлге тең емес $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ сандары үшін

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0, \forall x \in \langle a, b \rangle \quad (6)$$

теңдігі орындалады.

Осы қатынасты $n-1$ рет дифференциалдау арқылы сызықты алгебралық жүйе құрайық:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) &= 0 \\ \alpha_1 \varphi_1'(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n'(x) &= 0 \\ \dots &\dots \dots \\ \alpha_1 \varphi_1^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n^{(n-1)}(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Бұл біртекті сызықты алгебралық жүйенің нөлдік емес шешімі бар болуы үшін оның анықтауышы нөлге тең болуы керек, ал ол анықтауыш Вронский анықтауышы, яғни $W(x) = 0$.

Теорема-4. Егер $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ шешімдері $\langle a, b \rangle$ аралығында сызықты тәуелсіз болса, онда олардың вронскианы осы аралықтың бірде-бір нүктесінде нөлге айналмайды.

Дәлелдеуі. Кері жорық, кейбір $x_0 \in \langle a, b \rangle$ нүктесі үшін $W(x_0) = 0$ болсын. (7) жүйені бір нүкте үшін қайта құрайық:

$$\left. \begin{aligned} &\alpha_1\varphi_1(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n(x_0)=0 \\ &\alpha_1\varphi_1'(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n'(x_0)=0 \\ &..... \\ &\alpha_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0)=0 \end{aligned} \right\}$$

Бұл жүйенің анықтауышы $W(x_0) = 0$ болғандықтан, нөлге тең емес шешім бар:

$$\alpha_1 = \alpha_1^0, \dots, \alpha_n = \alpha_n^0$$

Осы сандар арқылы құрылған

$$\varphi(x) = \alpha_1^0 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_n^0 \varphi_n(x)$$

функцияны қарастырайық. Бұл қосынды (1) теңдеудің шешімі болатыны 1-теоремада көрсетілген және ол (2) бастапқы шарттарды қанағаттандырып тұр. Сондықтан, шешімнің жалғыздығы бойынша $\varphi(x) = 0$. Демек,

$$\alpha_1^0 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_n^0 \varphi_n(x) = 0$$

Мұндағы, $\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0$ бәрі бірдей нөлге тең емес. Соңғы қатынас $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ функцияларының сызықты тәуелділігін көрсетеді. Ал бұл теореманың шартына қайшы. Сондықтан, $W(x)$ бірде-бір нүктеде нөлге тең болмайды. Бұл шарт әрі жеткілікті – егер берілген шешімдердің вронскианы нөлге тең болмаса, онда олар берілген аралықта сызықты тәуелсіз. Бұл тұжырымды да кері жору арқылы оңай дәлелдеуге болады.

Бұл жүйенің анықтауышы $W(x_0)$ және ол нөлге тең емес. Сондықтан, (11) жүйенің жалғыз ғана шешімі бар: $C_1^0, \dots, C_n^0$. Осы табылған мәндерді (8) қатынасқа қойсақ, (10) бастапқы шартты қанағаттандыратын жалғыз дербес шешім аламыз.

Әдетте, бастапқы анықтауыштың мүшелері ретінде Кронекер символын алуға болады:

$$a_{jk} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

Осыған сәйкес бастапқы шартты да мына түрде

$$\varphi_j^{(k)}(x_0) = \delta_{jk}, (j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n)$$

алсақ, онда $W(x_0) = I$ болады. Бұл жағдайда фундаменталь шешімдер жүйесі x_0 нүктесінде нормаланған (қалыпталған) деп аталады.

Теорема-6. Берілген фундаменталь шешімдер жүйесі бойынша дифференциалдық теңдеу құруға болады және ол жалғыз болады.

Қолданылған әдебиеттер:

1. Мырзалыұлы Ж. Дифференциалдық теңдеулер: оқу құралы. – Алматы: Қазақ университеті баспасы, – 2006ж., 148 бет.
2. Сүлеймен Ж. Дифференциалдық теңдеулер курсы: оқулық. – Алматы: Қазақ университеті, – 2009. - 440 бет.
3. Мұхтаров М., Исмағұлова Н.М. Дифференциалдық теңдеулер бойынша дәрістер: оқу құралы. – Павлодар: Кереку, – 2015. - 410 бет.