

**8-дәріс. Жоғарғы ретті дифференциалдық
теңдеулер. Сызықты біртекті
дифференциалдық теңдеулер. Вронский
анықтауышы.**

аға оқытушы, PhD

Бекенаева К.С.

Дәріс жоспары:

1. n -ретті жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер
2. Реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулер

Дәріс мақсаты: n -ретті жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулердің ретін төмендету арқылы интегралдау әдістерімен таныстыру.

Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер

1.1. Жоғарғы ретті жәй дифференциалдық теңдеудің туынды бойынша шешілмеген түрі былай жазылады:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Мұндағы, x -тәуелсіз айнымалы, y -белгісіз функция, ал $y', y'', \dots, y^{(n)}$ - белгісіз функцияның туындылары ($n > 1$). F - кейбір $G \subset R^{n+2}$ облысында анықталған нақты үздіксіз функция.

Егер (1) қатынас жоғарғы $y^{(n)}$ туындысы бойынша шешілсе, онда былай жазамыз:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

Мұндағы, f - функциясы кейбір $D \subset R^{n+1}$ облысында анықталған үздіксіз функция деп есептелінеді.

Бұл теңдеулердің шешімдері де бірінші ретті теңдеулердің шешімдеріне ұқсас түрде анықталады.

Анықтама-1. $\langle a, b \rangle$ аралығында анықталған $y = \varphi(x)$ функциясы (2) теңдеудің осы аралықтағы шешімі деп аталынады, егер ол төмендегідей үш шартты қанағаттандырса:

- 4) $\varphi(x)$ функциясы $\langle a, b \rangle$ аралығында n рет дифференциалданатын болса;
- 5) $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in D, \forall x \in \langle a, b \rangle$;
- 6) $\varphi^{(n)}(x) = f[x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)], \forall x \in \langle a, b \rangle$.

Анықтама-2. $\langle a, b \rangle$ аралығында анықталған $y = \varphi(x)$ функциясы (1) теңдеудің осы аралықтағы шешімі деп аталынады, егер ол төмендегідей үш шартты қанағаттандырса:

- 1) $\varphi(x)$ функциясы $\langle a, b \rangle$ аралығында n рет дифференциалданатын болса;
- 2) $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \in G, \forall x \in \langle a, b \rangle$;
- 3) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \forall x \in \langle a, b \rangle$.

Жоғарғы ретті теңдеу үшін Коши есебі былайша қойылады: (2) теңдеудің барлық шешімдерінің ішінен

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y_0^I, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \quad (3)$$

шартын қанағаттандыратын шешімді табу керек. Мұндағы, $x_0, y_0, y_0^I, \dots, y_0^{n-1}$ сандарын бастапқы мәндер, ал (3) шартты бастапқы шарт деп атайды. Әрине, мұнда $(x_0, y_0, y_0^I, \dots, y_0^{n-1}) \in D$.

1.2. Жоғарғы ретті теңдеулердің қасиеттерін зерттегенде оларды бірінші ретті теңдеулер жүйесіне келтіріп алу ыңғайлы.

Берілген (2) теңдеу үшін мынандай белгілеулер енгізейік:

$$y = y_1, y' = y_2, y'' = y_3, \dots, y^{(n-1)} = y_n$$

Бұл жағдайда (2) теңдеудің орнына мынандай жүйе аламыз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Бұл жүйе жалпы қалыпты

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

жүйенің дербес түрі. Сондықтан, алда біз (5) түрдегі қалыпты жүйелерді қарастырамыз.

Жалпы, бірінші ретті n теңдеулердің қалыпты жүйесін n ретті бір теңдеуге келтіруге болады. Ол үшін (5) жүйенің бір теңдеуін $n-1$ рет дифференциалдап, сол жүйенің басқа теңдеулерін пайдаланып отыру керек (мұнда f_i функциялары керекті рет дифференциалданады деп алу керек). (5) жүйенің бірінші теңдеуін алып $n-1$ рет дифференциалдайық:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dx^2} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dx} = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n = g_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \frac{d^3 y_1}{dx^3} &= \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial g_2}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dx} = \\ &= \frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y_1} f_1 + \dots + \frac{\partial g_2}{\partial y_n} f_n = g_3(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Егер $\frac{\partial(f_1, g_2, \dots, g_{n-1})}{\partial(y_2, y_3, \dots, y_n)} \neq 0$, онда (5) жүйенің бірінші теңдеуінен және (6) жүйенің алдыңғы $n-2$ - теңдеуінен құрылған жүйені $y_2, y_3, \dots, y_n$ бойынша шешуге болады және олар $x, y_1, y_1^I, \dots, y_1^{(n-1)}$ арқылы өрнектеледі.

Осы табылған $y_2, y_3, \dots, y_n$ өрнектерін (6) жүйенің соңғы теңдеуіне апарып қойсақ,

$$y_1^{(n)} = f(x, y_1, y_1^I, \dots, y_1^{(n-1)}) \quad (7)$$

түріндегі n ретті бір теңдеу аламыз. (5) жүйе мен (7) теңдеудің интегралдық қисықтары бір болады.

Реті төмендетілетін теңдеулер

2.1. Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулерді айқындалмаған

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

теңдеу түрінде, немесе, жоғарғы туындысы бойынша шешілген

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

теңдеу түрінде жазуға болатыны айтылған.

Енді осы теңдеулердің ретін қандай жағдайларда төмендетіп, интегралдауды оңайлатуға болатынын көрсетейік.

I^0 . Тәуелсіз айнымалы айқын түрде кірмеген теңдеу:

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (3)$$

Бұл жағдайда тәуелсіз айнымалы үшін y -ты аламыз да, $y' = z(y)$ түрінде жаңа белгісіз енгіземіз.

Сонда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \frac{dy}{dx} = z \frac{dz}{dy}$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy} \left(z \frac{dz}{dy} \right) z = z \left(z \frac{d^2 z}{dy^2} + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right)$$

.....

$$y^{(n)} = \omega \left(z, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} \right)$$

Бұдан

$$F(y, z, zz', \dots, \omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0$$

түріндегі теңдеу аламыз. Бұл $(n-1)$ -ретті теңдеу. Егер осы теңдеуді интегралдау мүмкін болса, онда оның жалпы интегралы

$$\Phi(y, z, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0$$

немесе

$$\Phi(y, y', C_1, \dots, C_{n-1}) = 0$$

түрінде болады. Соңғы қатынас бірінші ретті теңдеу. Сондықтан, оның аралық интегралы берілген (3) теңдеудің жалпы интегралы болады.

2⁰. Белгісіз функция мен оның алғашқы туындылары кірмейтін теңдеу:

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (4)$$

Бұл жағдайда $y^{(k)} = z$ белгілеуін енгізсек,

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0 \quad (5)$$

түріндегі $(n-k)$ - ретті теңдеу аламыз. Демек, (4) теңдеудің реті k - бірлікке төмендеді. Егер соңғы теңдеудің

$$\Phi(x, z, C_1, \dots, C_{n-k}) = 0$$

түріндегі аралық интегралы белгілі болса, онда берілген теңдеудің жалпы интегралы

$$y^{(k)} = f(x, C_1, \dots, C_{n-k}) \quad (6)$$

теңдеуді интегралдау арқылы табылады.

3⁰. Белгісіз функция мен оның туындылары бойынша біртекті теңдеу.
Егер (1) теңдеудегі F функциясы үшін

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

шарты орындалса, онда ол функция m дәрежелі біртекті функция деп аталынады да, сәйкес теңдеу функция мен оның туындылары бойынша біртекті деп аталынады. Бұл жағдайда $y' = ty$ алмастыруы арқылы теңдеудің реті бір ретке төмендетіледі. Шынында да,

$$y'' = y't + yt' = y(t^2 + t'),$$

$$y''' = y'(t^2 + t') + y(2tt' + t'') = y(t^3 + 3tt' + t'')$$

.....

$$y^{(n)} = y\omega(t, t', \dots, t^{(n-1)})$$

Бұл өрнектерді (1) теңдеуге қойсақ,

$$F(x, t, t' + t^2, \dots, \omega(t, t', \dots, t^{(n-1)})) = 0$$

түріндегі $(n-1)$ -ретті теңдеу аламыз. Егер бұл теңдеудің

$$t = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1})$$

түріндегі жалпы шешімін таба алсақ, онда берілген теңдеудің жалпы шешімі

$$y' = y\varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1})$$

теңдеуін интегралдаудан алынады.

4⁰. Теңдеудің сол жағы басқа бір функцияның туындысы болса, онда теңдеудің реті бір ретке төмендейді. Шынында да,

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = 0$$

болғандықтан, бір аралық интеграл белгілі:

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = C_1,$$

яғни бастапқы теңдеудің реті бір өлшемге кеміді.

5⁰. Жалпыланған біртекті теңдеу, яғни F функциясы үшін

$$F(tx, t^k y, t^{k-1} y', \dots, t^{k-n} y^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

шарты орындалатын теңдеу. Бұл жағдайда $x = e^t, y = ze^t$ алмастыруы арқылы теңдеудің ретін бірге кемітуге болады.

Қолданылған әдебиеттер:

1. Мырзалыұлы Ж. Дифференциалдық теңдеулер: оқу құралы. – Алматы: Қазақ университеті баспасы, – 2006ж., 148 бет.
2. Сүлеймен Ж. Дифференциалдық теңдеулер курсы: оқулық. – Алматы: Қазақ университеті, – 2009. - 440 бет.
3. Мұхтаров М., Исмағұлова Н.М. Дифференциалдық теңдеулер бойынша дәрістер: оқу құралы. – Павлодар: Кереку, – 2015. - 410 бет.