

7-дәріс. Туынды бойынша шешілмеген теңдеулер. Лагранж және Клеро теңдеулері

Дәріс мақсаты: Туынды бойынша шешілмеген дифференциалдық теңдеулердің түрімен таныстырып, жалпы интегралын табуды үйрету. Лагранж және Клеро теңдеулерінің түрлерін анықтап, шешімдерін табу.

Толымсыз дифференциалдық теңдеулер: $y = f(y')$ және $x = f(y')$ түріндегі теңдеулер.

Теңдеулердің бірінші түрінде x аргументі, екіншісінде – y функциясы қатыспаған жағдайда бұл теңдеулер шешімдерін параметрлік түрде іздейміз, параметр ретінде белгісіз функция туындысы алынады:

$$y' = p.$$

Бірінші теңдеулер үшін: $y = f(p); y' = f'(p) \frac{dp}{dx}$.

Алмастыруды қолданамыз: $p = f'(p) \frac{dp}{dx}$.

Бұл түрлендірулер нәтижесінде айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер аламыз:

$$dx = \frac{f'(p)}{p} dp, \quad x = \int \frac{f'(p)}{p} dp + C.$$

Жалпы шешімі параметрлік түрде теңдеулер жүйесі арқылы беріледі:

$$\begin{cases} x = \int \frac{f'(p)}{p} dp + C \\ y = f(p) \end{cases}$$

Бұл жүйеден p параметрді жоя отырып, параметрден тәуелсіз жалпы интегралды аламыз.

$x = f(y')$ түріндегі дифференциалдық теңдеулер үшін дәл сондай алмастыру мен түрлендірулер қолданып, келесі нәтижені аламыз:

$$\begin{cases} y = \int p f'(p) dp + C \\ x = f(p) \end{cases}$$

Лагранж және Клеро теңдеулері.

Анықтама. **Лагранж теңдеуі** деп x пен y қатысты сызықты, коэффициенттері y' -тің функциялары болатын дифференциалдық теңдеулерді атайды:

$$P(y')x + Q(y')y + R(y') = 0$$

Жалпы шешімін табу үшін келесі алмастыру қолданылады: $p = y'$.

$$y = xf(p) + \varphi(p), \quad f(p) = -\frac{P(y')}{Q(y')}, \quad \varphi(p) = -\frac{R(y')}{Q(y')}.$$

Бұл теңдеуді $dy = p dx$ екенін ескере отырып дифференциалдайық:

$$p dx = f(p) dx + x f'(p) dp + \varphi'(p) dp.$$

Егер бұл (x -ке қатысты сызықты) теңдеудің шешімі $x = F(p, C)$ болса, онда Лагранж теңдеуінің жалпы шешімі келесі түрде болады:

$$\begin{cases} x = F(p, C) \\ y = x f(p) + \varphi(p) = F(p, C) f(p) + \varphi(p) \end{cases}$$

Мысал. Келесі теңдеуді интегралдаңыз:

$$y = 2xy' - 4(y')^3$$

Шешуі: Берілген теңдеу – Лагранж теңдеуі.

$y' = t$ деп ұйғарайық. Онда теңдеу келесі түрде жазылады:

$$y = 2xt - 4t^3$$

$$y' = 2t + 2x \frac{dt}{dx} - 12t^2 \frac{dt}{dx},$$

$$t = 2t + [2x - 12t^2] \frac{dt}{dx},$$

$$t + [2x - 12t^2] \frac{dt}{dx} = 0,$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2x - 12t^2}{t} = 0, \quad t \neq 0$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{t}x = 12t,$$

x және $\frac{dx}{dt}$ қатысты сызықты біртекті теңдеу аламыз. Оның шешімін Бернулли әдісімен табамыз:

$$x = u \cdot v \text{ деп іздейміз}$$

$$x' = u'v + v'u$$

$$\begin{cases} v' + \frac{2}{t}v = 0 \\ u'v = 12t \end{cases}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2}{t}dt \Rightarrow v = \frac{1}{t^2}$$

Жүйені шешіп $v = \frac{1}{t^2}$, $u = 3t^4 + C$ және сызықты біртекті теңдеудің жалпы шешімі келесі түрге ие болады:

$$x = \frac{1}{t^2}(3t^4 + C) = 3t^2 + \frac{C}{t^2}.$$

Сонымен, бастапқы теңдеудің интегралдық қисықтары келесі теңдеулермен анықталады:

$$\begin{cases} x = 3t^2 + \frac{C}{t^2} \\ y = 2xt - 4t^3 \end{cases} \quad \text{немесе} \quad \begin{cases} x = 3t^2 + \frac{C}{t^2} \\ y = 2t^3 + 2\frac{C}{t} \end{cases}.$$

Анықтама. Клеро теңдеуі деп: $y = xu' + \varphi(y')$ түріндегі (аргумент x пен y функциясына қатысты сызықты) дифференциалдық теңдеуді айтады

Жалпы алғанда, Клеро теңдеуі Лагранж теңдеуінің дербес жағдайы болады: $y' = p$ алмастыруын жасаймыз, сонда теңдеу былайша түрленеді:

$$y = xp + \varphi(p).$$

$$y' = p + x \frac{dp}{dx} + \varphi'(p) \frac{dp}{dx}; \quad p = p + x \frac{dp}{dx} + \varphi'(p) \frac{dp}{dx};$$

$$[x + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0;$$

Бұл теңдеудің екі шешімі болуы мүмкін:

$$dp = 0 \text{ немесе } x + \varphi'(p) = 0$$

Бірінші жағдайда: $p = C$; $y = Cx + \varphi(C)$.

Бұдан, Клеро теңдеуінің жалпы интегралы түзу сызықтар жиынтығы екендігі көрініп тұр.

Екінші жағдайда шешімі параметрлік түрде келесі теңдеулер жүйесі арқылы беріледі:

$$\begin{cases} y = xp + \varphi(p) \\ x + \varphi'(p) = 0 \end{cases}$$

p параметрін жоя отырып, екінші шешімді аламыз: $F(x, y) = 0$. Бұл шешімде кез келген C тұрақты болмайды және ол жалпы шешімнен алынған жоқ, ендеше ол дара шешім емес. Бұл шешім ерекше интеграл болады.

Мысал. $y = 2y'x + \frac{1}{y'}$ теңдеуін шеш.

Шешуі: $p = y'$ делік, сонда $y = 2px + \frac{1}{p}$ болады; Дифференциалдап және

dy -ті pdx -пен алмастырсақ, онда: $pdx = 2pdx + 2x dp - \frac{dp}{p^2}$ немесе

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x + \frac{1}{p^3}$$

Бұл сызықтық теңдеуді шешейік, сонда: $x = \frac{1}{p^2}(\ln|p| + C)$

Ендеше, жалпы интеграл келесі жүйе түрінде болады:

$$\begin{cases} x = 2px + \frac{1}{p} \\ x = \frac{1}{p^2}(\ln|p| + C) \end{cases}$$

Ерекше интегралды табу үшін келесі жүйені құрастырамыз:

$$y = 2px + \frac{1}{p}, \quad 0 = 2x - \frac{1}{p^2}$$

Бұдан, $x = \frac{1}{2p^2}$, $y = \frac{2}{p} \Rightarrow p = \frac{2}{y}$. $y = 2 \cdot \frac{2}{y}x + \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{y}{2} = \frac{4x}{y} \Rightarrow y^2 = 8x$.

Сондықтан $y = \pm 2\sqrt{2x}$.

y -ті берілген теңдеуге қоя отырып, табылған функцияның оның шешімі болмайтындығына көз жеткізуге болады, сол себепті берілген теңдеудің ерекше интегралы жоқ.

Әдебиет

1. Көлекеев К. Д., Назарова К. Ж. Дифференциалдық теңдеулер: Оқулығы. – Алматы: Дәуір, 2012. - 216 бет.
2. Мұхтаров М., Исмағұлова Н.М. Дифференциалдық теңдеулер бойынша дәрістер: оқу құралы. – Павлодар: Кереку, 2015. - 410 бет.
3. Сүлеймен Ж. Дифференциалдық теңдеулер курсы: оқулық. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. - 440 бет.
4. Шипачев В.С. Высшая математика. Москва. “Высшая школа” 1989г.