

5-дәріс. Толық дифференциалдық теңдеулер. Интегралдаушы көбейткіш

Дәріс мақсаты: Толық дифференциалдық теңдеулердің түрін ажыратуды, жалпы интегралын табуды үйрету. Толық дифференциалды теңдеулерге келтірілетін теңдеулердің интегралдаушы көбейткішін табу біліктілігін қалыптастыру

Толық дифференциалды теңдеу

Бірінші ретті

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

дифференциалдық теңдеуін қарастырайық. Егер осы теңдеудің сол жағы қандай да бір екі айнымалы функциясының толық дифференциалы болса, яғни

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU(x, y), \quad (2)$$

онда ол толық дифференциалды дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Толық дифференциалды теңдеуді әрқашанда

$$dU(x, y) = 0$$

түрінде өрнектеуге болады. Сондықтан оның жалпы интегралы

$$u(x, y) = C$$

түрінде анықталады.

Берілген теңдеудің толық дифференциалды болу шарты.

(1) теңдеудегі $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функцияларының x және y бойынша дербес туындылары бар болсын делік. Сонымен қатар, осы теңдеудің сол жағы қандай да бір $U(x, y)$ функциясының толық дифференциалы болсы, яғни

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU(x, y) \equiv \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Олай болса келесі тепе-теңдіктер орын алады:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \quad (3)$$

Бұл тепе-теңдіктердің біріншісін y бойынша, екіншісін x бойынша дифференциалдып, келесі теңдіктер аламыз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Тепе-теңдіктердің сол жақтары аралас дербес туындылар тең болғандықтан, олардың оң жақтары да өзара тең болады:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (4)$$

(аралас дербес туындылар үзіліссіз болса, онда олар дифференциалдау ретінен тәуелсіз). Осы (4) шарты дифференциалдық теңдеудің толық дифференциалды болуының қажетті шарты. Енді бұл шарттың жеткіліктілігін көрсетейік.

Расында да (4) шарты орындалсын. Онда (2) орындалатындай $U(x, y)$ функциясы бар болады, немесе (3) үшін де осындай функция табылады. Осылардың, мысалы, біріншісін қарастырайық:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y),$$

осыдан

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \varphi(y) \quad (5)$$

функциясы алындаы. Өйткені $P(x, y)$ анықталған облыс бір байланысты болғандықтан, интеграл алуға болады. Бұл өрнектегі $\varphi(y)$ – y -ке тәуелді кез келген функция. Оны дифференциалданатын функция деп есептеп, (3) шарттың екіншісі орындалатындай етіп таңдап аламыз, яғни

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \varphi'(y) = N(x, y),$$

Немесе

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx + \varphi'(y) = Q(x, y).$$

Соңғы формуладағы интеграл астындағы $P(x, y)$ функциясы, ұйғарымға сәйкес, x пен y және өзінің $\frac{\partial P}{\partial y}$ дербес туындысы бойынша да үзіліссіз болғандықтан, оны интеграл астында y параметрі бойынша дифференциалдауға болады.

Бұл теңдікті (4) теңдікті пайдаланып, былай жазамыз:

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx + \varphi'(y) = Q(x, y).$$

Интегралдау амалын орындаймыз:

$$Q(x, y) \Big|_{x_0}^x + \varphi'(y) = Q(x, y)$$

немесе

$$Q(x, y) - Q(x_0, y) + \varphi'(y) = Q(x, y).$$

Осыдан $\varphi'(y) = N(x_0, y)$ теңдігі алынады. Теңдіктің екі жағын да интегралдаудан кейін

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C_1$$

өрнегін аламыз, мұндағы C_1 – кез келген тұрақты шама.

Бұл (4) шарттың жеткілікті екенін дәлелдейді. Сонымен $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ шарты (1) теңдеудің толық дифференциалды теңдеу болуының қажетті және жеткілікті шарты болып табылады.

Мысалы: Дифференциалдық теңдеудің жалпы интегралын табыңыз:

$$(\ln y - 2x) dx + \left(\frac{x}{y} - 2y \right) dy = 0$$

Шешуі: $P(x, y) = \ln y - 2x, Q(x, y) = \frac{x}{y} - 2y$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (\ln y - 2x)'_y = \frac{1}{y};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(\frac{x}{y} - 2y \right)'_x = \frac{1}{y} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

яғни толық дифференциалды теңдеу $\Rightarrow$

$$u(x, y) = \int (\ln y - 2x) dx + \phi(y) = x \ln y - x^2 + \phi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x \ln y - x^2 + \phi(y))'_x = \ln y - 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x \ln y - x^2 + \phi(y))'_y$$

Толық дифференциал $du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ екені белгілі. Сондықтан

$$(\ln y - 2x) dx + \left(\frac{x}{y} - 2y \right) dy = du$$

$$\frac{x}{y} + \phi'(y) = \frac{x}{y} - 2y \Rightarrow \phi'(y) = -2y \Rightarrow \phi(y) = -2 \int y dy \Rightarrow \phi(y) = -2 \times \frac{y^2}{2} + c = -y^2 + c$$

Олай болса $u(x, y) = x \ln y - x^2 - y^2 + c$ немесе $-x \ln y + x^2 + y^2 = c$
- жалпы интеграл.

Интегралдаушы көбейткіш

Егер $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ теңдеудің сол жағы қайсыбір $u(x, y)$ функциясының толық дифференциалы емес болса, яғни

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

онда теңдеудің барлық мүшесін оған көбейткенде толық дифференциалды теңдеуге айналатындай, $\mu(x, y)$ функциясынын табуға болады. Сондағы алынған теңдеудің шешімі бастапқы берілген теңдеудің шешімімен бірдей болады. Бұл $\mu(x, y)$ функциясы **интегралдаушы көбейткіш** деп аталады.

1) $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ функциясы тек x -тен тәуелді болса, оны $M(x)$ деп белгілесек, онда

интегралдаушы көбейткіш $\mu = e^{\int M(x)dx}$ функциясы болады.

2) $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}$ функциясы тек y -тен тәуелді болса, оны $M(y)$ деп белгілесек, онда

интегралдаушы көбейткіш $\mu = e^{\int M(y)dy}$ функциясы түрінде алынады.

Мысалы: $ydx - xdy + \ln x dx = 0$ теңдеуінің жалпы интегралын тап.

Шешуі: $(y + \ln x)dx - xdy = 0$, мұндағы $P(x, y) = y + \ln x$, $Q(x, y) = -x$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (y + \ln x)'_y = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = (-x)'_x = -1, \quad \text{яғни} \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{1+1}{-x} = -\frac{2}{x} \quad \text{тек } x\text{-тен тәуелді, демек интегралдаушы көбейткішті } \mu = e^{\int M(x)dx}$$

өрнегімен табамыз:

$$\mu(x) = e^{\int \left(-\frac{2}{x}\right)dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2}(y + \ln x)dx - \frac{1}{x^2}xdy = 0 \Rightarrow$$

Сонымен $\frac{1}{x^2}(y + \ln x)dx - \frac{1}{x^2}dy = 0$ теңдеуін алдық, мұндағы $P(x, y) = \frac{1}{x^2}(y + \ln x)$, $Q(x, y) = -\frac{1}{x^2}$. Енді дербес туындыларын тексерейік:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x^2} \ln x \right)'_y = \frac{1}{x^2}; \quad \text{ал}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(-\frac{1}{x} \right)'_x = \frac{1}{x^2}, \quad \text{яғни} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$

$$u(x, y) = \int \left(\frac{y}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} \right) dx + \phi(y) = -\frac{y}{x} + \int \frac{\ln x}{x^2} dx + \phi(y) = \left. \begin{array}{l} u = \ln x, \\ du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{x^2} \\ v = -\frac{1}{x} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{y}{x} - \frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \phi(y) = -\frac{y}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + \phi(y) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(-\frac{y}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + \phi(y) \right)'_y = -\frac{1}{x} + \phi'(y) = Q_1(x; y)$$

$$-\frac{1}{x} + \phi'(y) = -\frac{1}{x} \Rightarrow \phi'(y) = 0 \Rightarrow \phi(y) = C_1$$

$$\text{Сонымен, } u(x; y) = -\frac{y}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_1 = C_2 \Rightarrow \frac{y}{x} + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} = C$$

$y + \ln x + 1 = Cx$ - ізделінді жалпы шешім.

Әдебиет

1. Көлекеев К. Д., Назарова К. Ж. Дифференциалдық теңдеулер: Оқулығы. – Алматы: Дәуір, 2012. - 216 бет.
2. Мұхтаров М., Исмағұлова Н.М. Дифференциалдық теңдеулер бойынша дәрістер: оқу құралы. – Павлодар: Кереку, 2015. - 410 бет.
3. Сүлеймен Ж. Дифференциалдық теңдеулер курсы: оқулық. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. - 440 бет.
4. Шипачев В.С. Высшая математика. Москва. “Высшая школа” 1989г.