

3-дәріс. Біртекті теңдеулер мен оған келтірілетін теңдеулер

Дәріс мақсаты: Біртекті теңдеулердің түрін анықтау, алмастыру арқылы айнымалылары ажыратылатын теңдеуге келтіруді, біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеулерді шешу әдістерін үйрету.

Біртекті дифференциалдық теңдеулер.

Анықтама. $f(x, y)$ функциясы өзінің x және y аргументтеріне қатысты **n -өлшемді біртекті** деп аталады, егер кез келген t параметрдің (нөлден өзге) мәні үшін келесі тепе-теңдік орындалатын болса:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Мысал 1. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ функциясы біртекті функция, себебі

$$f(tx, ty) = \sqrt[3]{(tx)^3 + (ty)^3} = t \sqrt[3]{x^3 + y^3} = t f(x, y).$$

Сонымен $f(x, y)$ функциясы 1-ші өлшемді біртекті болады.

Мысал 2. $f(x, y) = xy - y^2$ функциясы 2-өлшемді біртекті функция, себебі

$$(tx)(ty) - (ty)^2 = t^2 (xy - y^2).$$

Мысал 3. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ функциясы нөлдік өлшемді біртекті функция, себебі

$$\frac{(tx)^2 - (ty)^2}{(tx)(ty)} = \frac{x^2 - y^2}{xy},$$

яғни

$$\frac{(tx)^2 - (ty)^2}{(tx)(ty)} = \frac{x^2 - y^2}{xy},$$

$$f(tx, ty) = f(x, y) \text{ немесе } f(tx, ty) = t^0 f(x, y).$$

Анықтама. Егер $y' = f(x, y)$ түріндегі дифференциалдық теңдеудің оң жағы $f(x, y)$ функциясы өзінің x және y аргументтеріне қатысты нөлдік өлшемді біртекті функция болса, онда теңдеу **біртекті** деп аталады:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Нөлінші өлшемді біртекті функция тек аргументтердің қатынасынан тәуелді. Бұл жағдайда жоғарыдағы теңдеу келесі түрді қабылдайды:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Егер $P(x, y)$ және $Q(x, y)$ функциялары – бірдей өлшемді біртекті функциялар болса, онда $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ теңдеуі біртекті болады.

Анықтама. $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ түріндегі теңдеу **біртекті** дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Мұндай теңдеуді шешу үшін $\frac{y}{x} = u$ алмастыруын жасап айнымалылары ажыратылған дифференциалдық теңдеулерге келтіреміз.

$$\begin{aligned}\frac{y}{x} = u &\Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u \Rightarrow \\ u'x + ux' &= \varphi(u); \quad u'x + u = \varphi(u); \quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x}; \\ \frac{du}{\varphi(u) - u} &= \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;\end{aligned}$$

Интегралды таба отырып, u функциясының орнына x және y арқылы өрнектелген мәнін алмастырып, біртекті теңдеудің жалпы шешімін аламыз.

Мысал 1: $y' = \frac{y}{x} - 1$ - біртекті дифференциалдық теңдеуді шеш.

$$\begin{aligned}\frac{y}{x} = u &\Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u'x + u \Rightarrow u'x + u = u - 1 \Rightarrow u'x = -1 \Rightarrow xdu = -dx \Rightarrow \\ \int du &= -\int \frac{dx}{x} + \ln c \Rightarrow u = -\ln x + \ln c \Rightarrow u = \ln \frac{c}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \ln \frac{c}{x} \Rightarrow y = x \ln \frac{c}{x}\end{aligned}$$

Мысал 2:

$$\begin{aligned}y' &= -\frac{x+y}{x} \Rightarrow y' = -1 - \frac{y}{x} \\ \frac{y}{x} = u &\Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u \Rightarrow u'x + u = -1 - u \Rightarrow u'x = -1 - 2u \Rightarrow \\ x \frac{du}{dx} &= -1 - 2u \Rightarrow xdu = (-1 - 2u)dx \Rightarrow \frac{du}{1+2u} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \\ \int \frac{du}{1+2u} &= -\int \frac{dx}{x} + \ln c \Rightarrow \frac{1}{2} \ln|1+2u| = -\ln x + \ln C \Rightarrow \frac{1}{2} \ln|1+2u| = \ln \frac{C}{x} \Rightarrow \\ \ln|1+2u| &= 2 \ln \frac{C}{x} \Rightarrow \ln|1+2u| = \ln \frac{C^2}{x^2} \Rightarrow 1+2u = \frac{C}{x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2u &= \frac{C}{x^2} - 1 \Rightarrow u = \frac{C - x^2}{2x^2} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{C - x^2}{2x^2} \Rightarrow y = \frac{C - x^2}{2x};\end{aligned}$$

Мысал 3: $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$;

$$\begin{aligned}u + xu' &= e^4 + u \Rightarrow xu' = e^4 \Rightarrow \frac{xdu}{dx} = e^{-4} \Rightarrow \frac{du}{e^4} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ \int e^{-4} du &= \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -e^{-4} + \ln c = \ln x \Rightarrow \ln c - \ln x = e^{-4} \Rightarrow \\ \ln \frac{c}{x} &= e^{-4} \Rightarrow u = -\ln \ln \frac{c}{x} \Rightarrow y = -x \ln \ln \frac{c}{x};\end{aligned}$$

Біртекті теңдеуге келтірілетін дифференциалдық теңдеулер

Мұндай теңдеулерге $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ түріндегі теңдеулер жатады.

1) Егер анықтауыш $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, онда

$$x = u + \alpha, \quad y = v + \beta;$$

алмастыруын енгіземіз, мұндағы α және β сандары $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$ жүйесінің шешімдері.

Мысал. $(x-2y+3)dy + (2x+y-1)dx = 0$ теңдеуін шешіңіз.

Шешуі.

$$(x-2y+3)\frac{dy}{dx} = -2x-y+1;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x-y+1}{x-2y+3}$$

Анықтауышты есептейік: $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4+1=5 \neq 0$.

Нөлге тең емес болғандықтан келесі жүйені шешеміз:

$$\begin{cases} -2x-y+1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y=1-2x \\ x-2+4x+3=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=-1/5 \\ y=7/5 \end{cases};$$

Ендеше алмастыруымыз $x = u - 1/5$; $y = v + 7/5$ түрінде болады, оны алғашқы теңдеуге қоямыз:

$$(u-1/5-2v-14/5+3)dv + (2u-2/5+v+7/5-1)du = 0;$$

$$(u-2v)dv + (2u+v)du = 0;$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u+v}{2v-u} = \frac{2+v/u}{2v/u-1};$$

Айнымалыларды алмастырайық: $\frac{v}{u} = t$; $v = yt$; $v' = t'u + t$.

Жоғарғы теңдеуге қойсақ:

$$t'u + t = \frac{2+t}{2t-1}$$

Айнымалыларды ажыратайық: $\frac{dt}{du} u = \frac{2+t}{2t-1} - t = \frac{2+t-2t^2+t}{2t-1} = \frac{2(1+t-t^2)}{2t-1},$

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-2t}{1+t-t^2} dt; \quad \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \int \frac{(1-2t)dt}{1+t-t^2};$$

$$-\frac{1}{2} \ln |1+t-t^2| = \ln |u| + \ln C_1$$

$$\ln |1+t-t^2| = -2 \ln |C_1 u|$$

$$\ln |1+t-t^2| = \ln \left| \frac{C_2}{u^2} \right|; \quad 1+t-t^2 = \frac{C_2}{u^2};$$

Енді алғашқы функция y және айнымалы x -ке ораламыз:

$$t = \frac{y}{u} = \frac{y-7/5}{x+1/5} = \frac{5y-7}{5x+1}; \quad u = x+1/5;$$

$$1 + \frac{5y-7}{5x+1} - \left(\frac{5y-7}{5x+1} \right)^2 = \frac{25C_2}{(5x+1)^2};$$

$$(5x+1)^2 + (5y-7)(5x+1) - (5y-7)^2 = 25C_2$$

$$25x^2 + 10x + 1 + 25xy + 5y - 35x - 7 - 25y^2 + 70y - 49 = 25C_2$$

$$25x^2 - 25x + 25xy + 75y - 25y^2 = 25C_2 + 49 - 1 + 7$$

$$x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C_2 + \frac{55}{25} = C;$$

Сонымен, $x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C$ өрнегі берілген теңдеудің жалпы интегралы болып табылады.

2) Егер алғашқы $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ теңдеуде анықтауыш $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ онда $ax+by=t$ алмастыруын жасаймыз.

Мысал: $2(x+y)dy + (3x+3y-1)dx = 0$ теңдеуін шешіңіз.

$$\text{Шешуі: } 2(x+y)\frac{dy}{dx} = -3x-3y+1; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-3x-3y+1}{2x+2y};$$

$$\text{Анықтауышты есептейік: } \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

Ендеше $3x+3y=t$ алмастыруын жасаймыз.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t'}{3} - 1;$$

Бұл өрнекті алғашқы теңдеуге қоямыз:

$$\frac{t'}{3} - 1 = -\frac{3(t-1)}{2t}; \quad 2t(t'-3) = -9t+9; \quad 2tt' = 6t-9t+9; \quad 2tt' = -3t+9;$$

Айнамалыларды ажыратайық: $\frac{2t}{-3t+9} dt = dx; \quad \frac{t}{t-3} dt = -\frac{3}{2} dx;$

$$\int \left(1 + \frac{3}{t-3}\right) dt = -\frac{3}{2} \int dx,$$

$$t + 3 \ln |t-3| = -\frac{3}{2} x + C_1$$

Енді алғашқы функция у және айнымалы х-ке ораламыз:

$$2x + 2y + 2 \ln |3(x+y-1)| = -x + C_2;$$

$$3x + 2y + 2 \ln 3 + 2 \ln |x+y-1| = C_2;$$

$$3x + 2y + 2 \ln |x+y-1| = C;$$

Сөйтіп, берілген теңдеудің жалпы интегралын таптық.

Әдебиет

1. Көлекеев К. Д., Назарова К. Ж. Дифференциалдық теңдеулер: Оқулығы. – Алматы: Дәуір, 2012. - 216 бет.
2. Мұхтаров М., Исмағұлова Н.М. Дифференциалдық теңдеулер бойынша дәрістер: оқу құралы. – Павлодар: Кереку, 2015. - 410 бет.
3. Шипачев В.С. Высшая математика. Москва. “Высшая школа” 1989г.