

2-дәріс. Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер. Айнымалылары ажыратылатын теңдеулерге келтірілетін дифференциалдық теңдеулерді шешу

Дәріс мақсаты: Айнымалыларды ажыратылатын теңдеулердегі айнымалыларды ажырату біліктілігін қалыптастыру. Бірінші ретті теңдеулерді айнымалылары ажыратылатын түрге келтіру.

Анықтама. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу деп $F(x, y, y') = 0$ түріндегі теңдеуді айтады.

Егер бұл теңдік y' арқылы шешілсе, яғни $y' = f(x, y)$ түрінде жазылса, онда соңғы теңдеу туындысы арқылы шешілген дифференциалдық теңдеу делінеді.

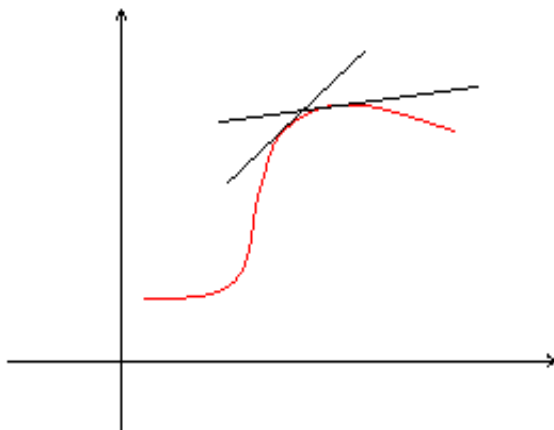
$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ - бұл бірінші ретті теңдеудің дифференциалды түрі деп аталады.

Анықтама. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің **жалпы шешімі** деп кез-келген бір тұрақты C -дан тәуелді және келесі шарттарды қанағаттандыратын $y = \varphi(x, C)$ функциясын айтады:

а) ол C тұрақтының кез келген мәнінде дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады;

ә) бастапқы шарт $x=x_0$ болғанда $y=y_0$ қандай болмаса да $y = \varphi(x, C_0)$ функциясы берілген бастапқы шартты қанағаттандыратындай $C=C_0$ мәнін табуға болады ;

Анықтама. Дифференциалдық теңдеудің $y = \varphi(x, C)$ жалпы шешіміндегі c тұрақтысына $C = C_0$ мәнін берсек, онда $y = \varphi(x, C_0)$ - теңдеудің **дербес шешімі** деп аталады.



Дифференциалдық теңдеудің шешімі болатын функция арқылы берілген S қисығы $y' = f(x, y)$ теңдеуінің интегралдық қисығы делінеді.

Айнымалылары ажыратылатын теңдеулер

Анықтама. $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ - түріндегі теңдеу айнымалысы **ажыратылатын** теңдеу деп аталады.

Бұл теңдеуді шешу үшін оның екі жағын да $M_2(x)N_1(y)$ көбейтіндісіне бөлеміз. Сөйтіп, айнымалысы ажыратылған теңдеу алуға болады.

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

а) $y' = f_1(x) \cdot f_2(x)$ теңдеуі айнымалылары ажыратылған теңдеуге келтіріледі. Ол үшін $y' = \frac{dy}{dx}$ деп алып айнымалыларды ажырату қажет.

б) $y' = f(ax + by + c)$ теңдеуін $ax + by + c = u$ ауыстыру арқылы айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуге келтіріледі, мұндағы a, b, c - кез келген сандар. x бойынша дифференциалдап,

$$\frac{du}{dx} = a + b \cdot \frac{dy}{dx}, \text{ яғни } \frac{du}{dx} = a + b \cdot f(u).$$

Бұдан алатынымыз: $\frac{du}{a + b \cdot f(u)} = dx$. Бұл теңдеуді интегралдап, u -дың орнына $ax + by + c$ қойып, берілген теңдеудің жалпы интегралын аламыз.

Анықтама. $M(x)dx + N(x, y)dy = 0$ - айнымалысы **ажыратылған** теңдеу, $\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$ - оның жалпы интегралы деп аталады.

Мысалы: $xdx + ydy = 0 \Rightarrow \int xdx + \int ydy = c$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$$

- берілген теңдеудің жалпы интегралы.

Мысал 1: $x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$ теңдеудің интегралын тап:

Шешуі:

$$\frac{xdx}{1+x^2} + \frac{ydy}{1+y^2} = 0,$$

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx + \int \frac{y}{1+y^2} dy = \ln c,$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2} = \ln C,$$

$$\frac{1}{2} \ln|1+x^2| + \frac{1}{2} \ln|1+y^2| = \ln C,$$

$$\ln(1+x^2)(1+y^2) = 2 \ln C,$$

$$\ln(1+x^2)(1+y^2) = \ln C^2,$$

$$(1+x^2)(1+y^2) = C^2 - \text{жалпы интеграл.}$$

Мысал 2: $y' = -\frac{y}{x}$ дифференциалдық теңдеудің жалпы және дара шешімдерін

табайық.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} \\ xdy &= -ydx, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{dx}{x} + \ln C \\ \ln y &= -\ln x + \ln C \\ \ln y &= \ln \frac{C}{x}, \quad y = \frac{C}{x}\end{aligned}$$

берілген теңдеудің жалпы шешімі. $x_0 = 2, y_0 = 1$ болғандағы теңдеудің дара шешімін табатын болсақ: $1 = \frac{C}{2} \Rightarrow C = 2$. Олай болса, $y = \frac{2}{x}$ берілген теңдеудің дара шешімі.

Мысал 3. $\sqrt{y^2 + 1} dx = xy \cdot dy$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі: Теңдеудің сол және оң жақ бөліктерін $x\sqrt{y^2 + 1}$ өрнегіне бөле отырып, $\frac{dx}{x} = \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + 1}}$ теңдігін аламыз.

Интегралдай отырып,

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + 1}} \quad (1)$$

немесе

$$\ln|x| = \sqrt{y^2 + 1} + C_1 \quad (2)$$

аламыз.

(1) теңдеудің сол жағы кестелі интеграл, ал оң жағы айнымалыны алмастыру арқылы табылады, мысалы, $\sqrt{y^2 + 1} = t, y^2 + 1 = t^2, 2y \cdot dy = 2t \cdot dt$ және

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + 1}} = \int \frac{t \cdot dt}{t} = \int dt = t + C_1 = \sqrt{y^2 + 1} + C_1$$

(2) шешімін $x = \pm e^{C_1} \cdot e^{\sqrt{y^2 + 1}}$ немесе $x = C \cdot e^{\sqrt{y^2 + 1}}$ түрінде жазамыз, мұнда $C = \pm e^{C_1}$.

Мысал 4. $y' = \frac{y}{x}$ теңдеуін шеш.

Шешуі: Айнымалыларды ажыратып, $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ аламыз. Интегралдап,

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x} + \ln|C_1|, \quad C \neq 0 \text{ немесе } \ln|y| = \ln|x| + \ln|C_1| \quad \text{теңдеуін шығарамыз. Бұдан} \\ |y| &= |C_1| \cdot |x| \Rightarrow y = \pm C_1 x. \quad \pm C_1 = C \text{ деп алып, берілген теңдеудің} \\ y &= Cx\end{aligned} \quad (3)$$

– жалпы шешімін аламыз, мұнда C - нөлге тең емес, оң да, теріс те мән қабылдай беретін кез келген тұрақты. $y = 0$ де теңдеудің шешімі (ол теңдеуді y -ке бөлгенде жоғалып кетті). Егер C тұрақтысы $C = 0$ мәнінде қабылдайды деп санасақ, онда бұл шешімді (3)-ке енгізуге болады.

(3) жалпы шешімінен $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ бастапқы шарттарды қанағаттандыратын дербес шешімді бөліп алайық. Бұл мәндерді (3) жалпы шешімдегі x және y -тің орын-дарына қоя отырып, $2 = C \cdot 1$ аламыз, ендеше $C = 2$. Демек, $y = 2x$ - дербес шешім.

Әдебиет

1. Көлекеев К. Д., Назарова К. Ж. Дифференциалдық теңдеулер: Оқулығы. – Алматы: Дәуір, 2012. - 216 бет.
2. Сүлеймен Ж. Дифференциалдық теңдеулер курсы: оқулық. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. - 440 бет.
3. Шипачев В.С. Высшая математика. Москва. “Высшая школа” 1989г.