

№14 дәріс.

Өзара жай көпмүшеліктер. Көпмүшеліктердің түбірлері.

Анықтама 1. Егер $E.Y.O.B.$ $(f(x), g(x)) = (f, g) = 1$ болса, онда $f(x)$ және $g(x)$ көпмүшеліктері өзара жай көпмүшеліктер деп аталады.

Лемма. A – коммутативті бүтіндік облысы болсын.

$$\forall a, b, c \in A, a \neq 0 \quad ab = ac \Rightarrow b = c.$$

Теорема 1. A – коммутативті бүтіндік облысы болсын.

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \in A[x] \Rightarrow |R(f(x))| \leq n,$$

мұндағы $|R(f(x))|$ – өрнегі $f(x)$ көпмүшелігінің түбірлерінің саны.
($f(\alpha) = 0$, онда $\alpha - f(x)$ тің түбірі)

Теорема 2. A – коммутативті бүтіндік облысы болсын.

$A[x]$ – көпмүшеліктер сақинасы, $|A|$ – шексіз $\Rightarrow \forall f_1(x), f_2(x)$ үшін
 $\forall c \in A \quad f_1(c) = f_2(c)$, онда $f_1(x) = f_2(x)$.

Анықтама. A – алгебралық тұйықталған өріс болса $\Leftrightarrow$

$$\forall f(x) \in A[x] \quad \exists \alpha \in A: f(\alpha) = 0.$$

Теорема 3. Егер A – алгебралық тұйықталған өріс болса, онда $\forall f(x) \in A[x]$
, $\exists \alpha \in A \quad (f(\alpha) = 0)$, $\deg f(x) = n$, $c_1, c_2, \dots, c_n$ – түбірлер, онда

$$f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n, \quad \alpha_0 \neq 0, \quad n \geq 1$$

$$f(x) = \alpha_0 (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)$$

Теорема 4. C – комплекс сандар жиыны алгебралық тұйықталған өріс болады.

Лемма. $\forall f(x) \in C[x]$ үшін $f(x) = \alpha_0 (x - \alpha_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_k)^{n_k}$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – түбірлер, $\alpha_i \in C$.

Теорема. (Виет теоремасы).

$$f(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n \quad (*), \quad \text{онда} \quad \exists c_1, \dots, c_n \in R(f) \quad \Rightarrow$$

$f(x) = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)$. Осыдан $(*)$ формуласымен салыстыра отырып алатынымыз:

$$\alpha_1 = -(c_1 + \dots + c_n),$$

$$\alpha_2 = c_1 c_2 + c_1 c_3 + \dots + c_1 c_n + c_2 c_3 + \dots + c_{n-1} c_n,$$

$$\alpha_3 = -(c_1 c_2 c_3 + c_1 c_2 c_4 + \dots + c_{n-2} c_{n-1} c_n),$$

... ..

$$\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1} (c_1 c_2 \cdot \dots \cdot c_{n-1} + c_1 c_2 \cdot \dots \cdot c_{n-2} c_n + \dots + c_2 c_3 \cdot \dots \cdot c_n)$$

$$\alpha_n = (-1)^n c_1 c_2 \cdot \dots \cdot c_n$$

$n = 2$ болған жағдай өзімізге белгілі Виет формуласы.

Анықтама. Егер $f(x) \in K[x]$ көпмүшелігі дәрежелері өзінің дәрежесінен кіші көпмүшеліктердің көбейтіндісіне жіктелсе, онда ол K сақинасында (P өрісінде, егер $f(x) \in P[x]$) келтірілетін көпмүшелік, ал жіктелмесе, келтірілмейтін көпмүшелік деп аталады.

Теорема. R - нақты сандар өрісінде тек ғана 1-ші және 2-ші дәрежелі нақты түбірі жоқ көпмүшеліктер ғана келтірілмейтін болады.

Теорема. C –комплекс сандар өрісінде келтірілмейтін көпмүшеліктер тек 1-ші дәрежелі болады.

Келтірілмейтін көрмүшеліктер туралы бірнеше теоремалар келтірейік.

Теорема. Егер $p_1(x)$ және $p_2(x)$ көпмүшеліктері P өрісінде келтірілмейтін көпмүшеліктер болса, онымен бірге $p_1(x)$ көпмүшелігі $p_2(x)$ көпмүшелігі бөлінсе, онда $p_1(x)$ және $p_2(x)$ көпмүшеліктері көпмүшеліктері ноль дәрежелі көпмүшеліктің дәлдігіне дейін тең көпмүшеліктер болады. Басқаша айтқанда $p_1(x) = c p_2(x)$, мұнда $0 \neq c \in P$.

Теорема. $P[x]$ сақинасының $f(x)$ көрмүшелігі P өрісінде келтірілмейтін көпмүшелік болуы үшін келтірілмейтін $p(x)$ көпмүшелігіне қалдықсыз бөлінбеуі қажетті және жеткілікті, мұндағы $f(x)$ және $p(x)$ көпмүшеліктерінің өзара жай көпмүшеліктер, $\deg p(x) < \deg f(x)$.

Теорема. Егер $P[x]$ сақинасындағы $f(x)$ және $g(x)$ көпмүшеліктерінің көбейтіндісі осы сақинада келтірілмейтін немесе жіктелмейтін $p(x)$ көпмүшелігіне бөлінсе, онда $p(x)$ көпмүшелігіне не $f(x)$, не $g(x)$ көпмүшелігі бөлінеді.

Теорема. $P[x]$ сақинасындағы дәрежесі бірден кем емес $f(x)$ көпмүшелігі осы сақинада келтірілмейтін көпмүшеліктердің көбейтіндісіне жіктеледі:

$$f(x) = p_1(x) \cdot \dots \cdot p_k(x),$$

мұнда $p_i(x)$ көпмүшеліктері P өрісінде келтірілмейтін көпмүшеліктер.

Бұл жіктелу көбейткіштердің реті және ноль дәрежелі көпмүшеліктің дәлдігіне дейін бір-ақ түрде болады.