

№ 12 дәріс

Муавр формуласы. Комплекс санның n -дәрежелі түбірі.

Мына Эйлер формуласын $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ қолдансақ, $z = re^{i\varphi}$ (3) - комплекс санның көрсеткіштік түрін шығарамыз.

$$|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 = \varphi_1 + \varphi_2$$

Егер $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ болса, онда

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

$$|z^n| = r^n; \arg z^n = n \arg z = n\varphi,$$

Осыдан $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ – Муавр формуласы шығады.

Мысал. $(1 + \sqrt{3}i)^9$ табу керек.

$z = 1 + \sqrt{3}i$ тригонометриялық түрге келтірейік.

$$|z| = r = 2, \quad \arg z = \frac{\pi}{3} \quad z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Сондықтан} \quad z^9 &= (1 + \sqrt{3}i)^9 = 2^9 \left(\cos 9 \frac{\pi}{3} + i \sin 9 \frac{\pi}{3} \right) = 2^9 (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = \\ &= 2^9 (-1) = -512 \end{aligned}$$

Айталық, $a = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ комплекс саны берілсін. Онда көбейту амалының негізінде n - натурал саны үшін $a^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, яғни комплекс санды дәрежелегенде оның модулі сол дәрежеге шығарылады, ал аргументі сол дәреже көрсеткішіне көбейтіледі.

$a^{-n} = (a^{-1})^n$ теңдігін пайдаланып, Муавр формуласын бүтін теріс сандар үшін де пайдалануға болады.

$a = a + bi$ комплекс санын оң бүтін n дәрежеге шығару үшін Ньютонның биномын пайдаланған орынды, тек $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$ ($k \in \mathbb{N}$) ескерсек жеткілікті.

Муавр формуласының дербес түрін қарастырайық.

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Теңдіктің оң жақ бөлігіне Ньютонның биномды формуласын қолданайық.

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n &= \cos^n \varphi + i C_n^1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi - \\ & i C_n^3 \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + C_n^4 \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi + i C_n^5 \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi - \dots = \\ & \cos^n \varphi - C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + C_n^4 \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots + i (C_n^1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \\ & C_n^3 \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + C_n^5 \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi - \dots), \end{aligned}$$

мұндағы

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

теңдігінің сол және оң жақ бөліктерін салыстырсақ,

$$\begin{aligned}\cos n\varphi &= \cos^n \varphi - C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + C_n^4 \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots = \\ &= \sum (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k} \varphi \sin^{2k} \varphi, \quad \sin n\varphi = C_n^1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \\ &- C_n^3 \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + C_n^5 \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi - \dots = \sum (-1)^k \cos^{n-1-2k} \varphi \\ &\sin^{2k+1} \varphi,\end{aligned}$$

теңдіктерін аламыз.

$$\text{Сонымен, } \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \text{ мұндағы}$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$ -ға әртүрлі мәндер беру арқылы түбірдің әртүрлі мәндерін аламыз.

Қорытынды. Комплекс сандардан n -ші дәрежелі түбірді әрқашан табуға болады және оның әртүрлі n мәні болады.

Түбір табу амалы дәрежелеу амалына кері амал ретінде анықталады.

z санының n -дәрежелі түбірі деп мына теңдікті $w^n = z$ қанағаттандыратын w санын айтамыз, яғни $w = \sqrt[n]{z}$, егер $w^n = z$ болса.

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, ал $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ десек, онда $z = w^n = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Осыдан $\rho = \sqrt[n]{r}$ (арифметикалық түбір), $n\theta = \varphi_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. немесе $w = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} \right), (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$

сандары шығады, яғни санның n әртүрлі түбірлері табылады.

Мысал. $w = \sqrt[4]{-16}$ табу керек.

Шешуі. $z = -16 = 16[\cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi)], \varphi_0 = \pi$ болғандықтан.

Сондықтан $w = \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right)$, мұндағы $k = 0, 1, 2, 3$.

$$1) k = 0, w_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

$$2) k = 1, w_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{4} \right) = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

$$3) k = 2, w_3 = 2 \left(\cos \frac{\pi + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{4} \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

$$4) k = 3, w_4 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Табылған түбірлер радиусы 2-ге тең шеңберді іштей сызылған квадраттың төбелеріне орналасады.

