

Дәріс №8

Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешудің Крамер ережесі. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін матрицалық әдіспен шешу.

Крамер ережесі n белгісізі бар n сызықтық теңдеулер жүйелерін шешуге қолданылады.

Крамер теоремасы. Егер $\Delta = |A| \neq 0$ болса, онда $A \cdot X = B$ жүйесі анықталған және оның шешімі мына формуламен $x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}$ табылады. Мұндағы $\Delta x_i, \Delta = |A|$ анықтауышының i -тік жолын бос мүшелер бағанасымен ауыстырғандағы анықтауыштар. Егер $\Delta = |A| = 0$ болып, ал Δx_i -дің кемінде бірі нөл емес болса, онда берілген жүйе үйлесімсіз, ал барлық $\Delta x_i = 0, (i = \overline{1, n})$ болса, онда жүйе анықталмаған болады.

Крамер теоремасы және одан шыққан қорытындыларды жеңіл дәлелдеуге болады.

Мысал.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases}$$

Шешуі:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 - 4 - 4 + 16 - 0 = 2 \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} -7 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -5 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 30 + 4 + 20 - 56 - 0 = -2$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 14 - 5 + 1 + 20 - 0 = 2 \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -7 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -40 + 3 + 28 + 28 - 8 - 15 = -4$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-2}{2} = -1; x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1; x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-4}{2} = -2$$

Матрицалық әдіс n белгісізі бар n сызықтық теңдеулер жүйелерін шешуге қолданылады.

$A \cdot X = B$ теңдеуі берілсін, $m=n$, $|A| \neq 0$, яғни A ерекше емес.

Теңдеуді сол жақтан A^{-1} көбейтіп, мына түрге келеміз. $A^{-1}AX = A^{-1}B$ яғни $X = A^{-1}B$ Сонымен $A^{-1}B = C$ болса, онда $X=C$ бағана матрица теңдеудің шешімі болады.

Мысал.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases} .$$

$$\text{Мұнда } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ және } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$$

A ерекше емес. Сондықтан, A^{-1} табылады

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2, A_{12} = 2, A_{13} = 4, A_{21} = 11, A_{22} = -4, A_{23} = -1,$$

$$A_{31} = 5, A_{32} = 2, A_{33} = -3.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 11 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}. \text{ Осыдан } C = A^{-1}B = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 & 11 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Сонымен, } x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$$