

Дәріс № 5

Кері матрица. Матрицаны элементар түрлендіру.

Егер квадрат матрицаның анықтаушы $|A| \neq 0$ болса, онда ол *ерекше емес матрица* делінеді де, ал $|A| = 0$ болғанда, ол *ерекше матрица* делінеді.

Кері матрица ұғымы квадратты және ерекше емес матрицаға ғана тән ұғым. Егер A квадрат матрицасының $|A| \neq 0$ болса, онда оған *кері матрица* A^{-1} деп, мына шартты

$AA^{-1}=A^{-1}A=E$ қанағаттандыратын матрицаны айтады.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ берілсін.}$$

Осы матрицаның элементтерінің алгебралық толықтауыштарынан тұратын матрицаны $A^k = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

Теорема-1. A матрицасының кері матрицасы A^{-1} бар болуы үшін, осы A матрицасының ерекше емес болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі:

1. Қажеттілік. A^{-1} бар болсын. Онда $AA^{-1}=E$ – бірлік матрицасы. Осыдан $|A \cdot A^{-1}| = |E|$, немесе $|A||A^{-1}| = 1 \cdot |A| \neq 0$ болғандықтан, A ерекше емес.

2. Жеткіліктілік. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^k$ болатынын дәлелдейік, яғни A^{-1} болуын көрсетейік.

$A \cdot A^k$ табайық.

$$A \cdot A^k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} A_{i1} & a_{11} A_{21} + \dots + a_{1n} A_{2n} & \dots & a_{11} A_{n1} + \dots + a_{1n} A_{nn} \\ a_{21} A_{11} + \dots + a_{2n} A_{1n} & \sum_{i=1}^n a_{2i} A_{2i} & \dots & a_{21} A_{n2} + \dots + a_{2n} A_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} A_{11} + \dots + a_{nn} A_{1n} & a_{n1} A_{21} + \dots + a_{nn} A_{2n} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{ni} A_{ni} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = |A|E$$

Осыдан $E = \frac{AA^k}{|A|} = \frac{A^k}{|A|} \cdot A$, яғни $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^k (*)$.

Теорема дәлелденді.

Сонымен кері матрица A^{-1} табу үшін $(*)$ формуласын қолданамыз.

Теорема-2. Матрицаның кері матрицасы жалғыз ғана болады.

Дәлелдеуі:

A_1^{-1}, A_2^{-1} берілген A матрицасының кері матрицалары делік. $AA_1^{-1} = E$ теңдігін A_2^{-1} сол жағынан көбейтейік: $A_2^{-1}AA_1^{-1} = A_2^{-1}E = A_2^{-1}$. Басқаша түрде $A_2^{-1}AA_1^{-1} = (A_2^{-1}A)A_1^{-1} = EA_1^{-1} = A_1^{-1}$. Осыдан $A_2^{-1} = A_1^{-1}$ шығады.

Теорема дәлелденді.

Матрицаның элементар түрлендірулері деп:

- 1) Матрицаның кез келген жатық (немесе тік) жолын қайсы бір нөл емес санға көбейтуді;
- 2) Екі параллель жатық (немесе тік) жолдардың орындарын ауыстыруды;
- 3) Матрицаның кез келген жатық немесе тік жолының элементтерін нөлге тең емес бір санға көбейтіп, басқа жатық (немесе тік) жолдың сәйкес элементтеріне қосуды айтады.

Мысал.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A^{-1} \text{ табайық}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3, A_{12} = -3, A_{13} = 6, A_{21} = -4, A_{22} = 1, A_{23} = -2, A_{31} = 2, A_{32} = -5, A_{33} = 1.$$

$$\text{Сондықтан } A^k = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}. |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

$$\text{Сондықтан } A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^k = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & 2/9 \\ 1/3 & -1/3 & 5/9 \\ -2/3 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix}.$$