

№ 2 дәріс

Минор және алгебралық толықтауыш. Лаплас теоремасы.

Анықтауыштың элементінің миноры және алгебралық толықтауышы ұғымдарын қарастырайық.

Егер анықтауыштың i -жатық жолымен j -тік жолын сызып тастап, қалған элементтердің орынын ауыстырмай олардан реті бірге кем анықтауыш құрсақ, оны осы анықтауыштың a_{ij} элементінің *миноры* деп атаймыз.

Мысал.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; a_{32} \text{ элементінің миноры мына анықтауыш } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \text{ болады.}$$

Минор былай белгіленеді M_{ij} . Ал $(-1)^{i+j}$ таңбасымен алынған минор, яғни $(-1)^{i+j} M_{ij} = A_{ij}$ – анықтауыштың a_{ij} элементінің *алгебралық толықтауышы* деп аталады.

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}; \text{ Мына теорема орындалады.}$$

Лаплас теоремасы. Анықтауыштың кез келген бір жатық (немесе тік) жолының элементтерінің алгебралық толықтауышын осы элементтерге көбейтіп олардың қосындысын тапсақ, онда анықтауыштың мәні шығады. Яғни,

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}. (\forall i)$$

Теореманың орындалуын үшінші ретті анықтауышта көрсетейік

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} -$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) +$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Теореманы жоғары ретті анықтауыштарды есептеуге қолданамыз.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0 (i \neq k). \text{ Болатынын дәлелдеусіз келтірейік.}$$

Мысал.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \text{ Үшінші жатық жол элементтері арқылы анықтауышты}$$

жіктейміз.

$$\begin{aligned}
|A| &= 0A_{31} + 0A_{32} + 1A_{33} + 3A_{34} = 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \\
&+ 3(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2 + (-2) + 2 - (-1) - 8 - 1) - \\
&- 3(1 + 2 + 0 - 0 + 1 - 4) = -6.
\end{aligned}$$

Ескерту. Анықтауышты есептеу үшін нөлдері көп жолды алу керек.