

1. Код деп әртүрлі ақпараттарды таратуға, өңдеуге және сақтауға (есте сақтауға) арналған шартты белгілердің (таңбалардың) жүйесін айтады. Кодтау теориясының зерттеу пәні – ақырлы немесе санамалы кез келген табиғатты объектілер жиынын $\{0,1,\dots,r-1\}$ цифрлар тізбегінен тұратын жиынға бейнелеу болып табылады, мұндағы r – кейбір теріс емес бүтін сан (жекелеген жағдайда $r=2$). Мұндай бейнелеуді кодтау деп атайды. Кодтау теориясының көптеген есептері келесі жүйеге сияды. Берілген объектілер жиыны үшін белгілі бір қасиетке ие кодтау кластары қарастырылады. Қарастырылып отырған кодтау кластарынан берілген есептің тиімді шешімін (алдын ала берілген мағынада) табуға қажетті класты таңдап алу.

Кодтаудың тиімділік критерийі әдетте кодтың ұзындығын минимизациялаумен байланысты, бірақ осыған қарамастан қажетті кодтаудың қасиеттері әртүрлі болуы мүмкін.

Мұндай қасиеттердің ішінде: кодтау мен декодтаудың (қарапайым бірімді кері бейнелеудің) бар болуы және олардың алгоритімінің болуы мүмкіндігі және т.т. жатады.

Айталық, A – кез келген алфавит болсын.

A алфавитінің элементтерін *әріптер* деп, ал осы әріптерден құрылған ақырлы тізбектерді (кортеждерді) *сөз* деп атайды.

α сөзіндегі әріптер санын оның *ұзындығы* деп атайды және $\lambda(\alpha)$ арқылы белгілейді.

Ұзындығы 0 (бос сөз) сөзді Λ арқылы белгілейді. α_1 және α_2 сөздерінің (α_1 және α_2 сөзін тізбектей тіркеп жазуды) тіркесін $\alpha_1 \alpha_2$ арқылы, ал n бірдей α сөзінің тіркесін α^n арқылы белгілейміз. Айталық U - A -алфавитіндегі кез келген сөздер жиыны болсын. U^n ($n=0,1,\dots$) арқылы A^n алфавитіндегі n ұзындықты сөздердің жиынын белгілейік және олар U -дан алынған n сөздердің бірігуі түрінде кескінделсін (өрнектелсін). Жеке жағдайда, A^n ($n=0,1,\dots$) арқылы A алфавитінен алынған ұзындығы n -ге тең барлық сөздердің жиынын белгілейміз, ал A^* арқылы A -дан алынған кез келген ұзындықты барлық сөздердің жиынын белгілейміз. $U^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} U^n$ жиыны A алфавитінен алынған әртүрлі барлық сөздер емес, бұл U жиынын таңдауға байланысты. Мысалы, егер U жиыны 00 және 11 сөздерінен құрылса (тұрса), онда олардың кез келген бірігуінің; біріншіден – ұзындықтары жұп сан, екіншіден- нольдер мен бірлер пар-парлармен орналасады.

Мысалы, 0110 сөзі U^2 жиынына тиісті емес.

α_1 сөзі α сөзінің *басы* (басталуы) деп аталады, егер $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$ болатын α_2 сөзі табылса.

Егер $\alpha_2 \neq \Lambda$ және $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$ болса, онда α_1 сөзін α сөзінің *өзіндік басы* деп атайды.

Осыған ұқсас, α_2 сөзі α сөзінің *соңы* (аяқталуы) деп аталады, егер α_1 сөзі табылып $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$ болса және $\alpha_1 \neq \Lambda$ болса, онда α_2 сөзі α сөзінің *өзіндік соңы* деп аталады.

Бос сөзді кез келген α сөзінің басы және соңы деп қабылдаймыз.

U жиынындағы сөздердің бастарының (басталуларының) жиынын $\vec{U}$ арқылы, ал сондарының (аяқталуларының) жиынын $\overleftarrow{U}$ арқылы белгілейміз.

2. $B_{(r)} = \{0, 1, \dots, r-1\}$, мұндағы $r \geq 2$, алфавитін және кез келген G жиынын қарастырайық.

Жеке жағдайда, G жиыны – ақырлы алфавит, сызба (схема), натурал сандар жиыны, анықталған текті (типті) формулалар, кейбір алфавиттегі сөздер жиыны және т.т., болуы мүмкін.

G жиынының B алфавитіндегі сөздер жиынына кез келген бейнеленуін G жиынының Γ -негізгі (Γ -лік) кодталуы деп атайды.

Біз тек қана $r = 2$ болған жағдайды қарастырайық, яғни еселік кодтау, осыған байланысты $\log X$ өрнегін $\log_2 X$ деп түсінеміз.

Кодтаудың мысалдары

1. а) E кодтауы – натурал сандардың екілік жазылуы. $n = 0$ санына $l(0) = 0$ сөзі

сәйкес қойылады, ал $n > 0$ санына $\sum_{j=1}^{l(n)} b_j^{(n)} \cdot 2^{l(n)-j} = n$

Шартын қанағаттандыратын ұзындығы ең қысқа

$$l(n) = b_1^{(n)} b_2^{(n)} \dots b_{l(n)}^{(n)}$$

сөзін сәйкес қоямыз.

Әрине, n санының жазылуы 1 цифрынан басталады, яғни $b_1^{(n)} = 1$, ал таңбалар саны $l(n)$ келесі екілік теңсіздікті қанағаттандыруға тиісті:

$$2^{l(n)-1} \leq n < 2^{l(n)}$$

Сонымен, $l(n) = [\log n] + 1 = [\log(n+1)]$, мұндағы $[X]$ - өрнегі X санының бүтін бөлігі, ал $]X[$ өрнегі X санынан кіші емес ең кіші бүтін сан.

E кодтауы өзара бірімәнді бейнелеу (сәйкестік): $n_1 \neq n_2$ болғанда $e(n_1)$ және $e(n_2)$ сөздері әртүрлі.

б) E_k алғашқы 2^k натурал санды кодтау. Әрбір n натурал санына $e_k(n) = 0^{k-l(n)} l(n)$ сөзін сәйкес қояды ($0 \leq n < 2^k$).

$e_k(n)$ сөзі n санының k цифрдың көмегімен екілік жазылуы деп аталады.

E_k кодтауында алғашқы 2^k натурал сан ұзындығы k болатын екілік сөздер жиынына бейнеленеді.

1 таңбасына қолданылатын кесінділердің номерлері 3,4,8 сандарына сәйкес келеді.

Мысалы, 2 цифрына 1, 4, 7, 9 номерлері сәйкес келсе, оған 100100101 сөзі сәйкес келеді.

5-цифрына 110010011 сөзі сәйкес келеді.

Ақырлы жиындарды екілік сөздердің кейбір ішкі жиынына бейнелеуді осы жиындардың элементтерінің санын есептеу немесе бағалау арқылы беру өте қолайлы.

Мысалға, n санының теріс емес бүтін m қосылғышқа ретті жіктелуі (үлестірілуі) болатын $F_{n,m}$ -жиынын қарастырайық.

Әрбір $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ жіктелуіне $0^{n_1} 10^{n_2} 1 \dots 10^{n_m}$ сөзін сәйкес қоямыз. Бұл сөздің ұзындығы $(n + m - 1)$, яғни, ол n -нольдерден және $(m - 1)$ бірлерден тұрады.

Бірлер нольдердің тізбектерін бір-бірінен ажырату үшін қажет.

11 санының 4 қосылғышқа жіктелуін қарастырайық $11 = 5 + 0 + 2 + 4$ болса, оған сәйкес келетін кодтық сөз 00000110010000.

$11=2+7+2+0$ болса, онда ол 001000000010011 сөзімен ал $11=1+1+6+3$ болса 01010000001000 сөзімен кодталады. Мұндай кодтау $F_{n,m}$ жиынын ұзындығы $(n+m-1)$ болатын еселік сөздер жиынына өзара бірімәнді бейнелеу болады.

Мұндағы, әрбір $(n+m-1)$ сөзде тура $(m-1)$ бірлер бар.

2. Кодтау теориясында кейбір A алфавитіндегі барлық сөздерінен (немесе бөлініп алынған бөлігін) тұратын G жиынын кодтау (маңызды) ерекше роль атқарады.

Кодталатын жиынның элементтері (яғни, A -ның бөлініп алынған, айқындалған сөздері) бұл жағдайда *ақпараттар* - деп аталады. Ақпарат - байланыс тораптары (каналдары) арқылы таратылуы мүмкін кодтар.

Жалпыжағдайда, ақпарат үшін сәйкестендірілген екілік сөзді есептеу процессіне (алгоритмнің өзі, оның тиімділігі) ешқандай шарт қойылмайды.

Бірақ та, көпшілік сұрақтар үшін *әріптері бойынша кодтау* деп аталатын сөздерді кодтаудың біршама кіші класын қарастырумен шектелу жеткілікті.

Айталық, $A = \{a_i\}$ әріптері натурал сандармен номерленген арқылы алфавит болсын.

Бұл жағдайда, A алфавитінің әріптерін кодтауды $V = \{v_i\}$ екілік сөздерді арқылы беруге болады, мұндағы, v_i -сөзі a_i әрпінің бейнесі.

$V = \{v_i\}$ сөздері A алфавитінің кодтары деп аталады. A алфавитінің әрбір $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$ сөзіне (ақпаратына) $v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_k}$ сөзін сәйкес қою A алфавитінің сөздерін *әріптері бойынша кодтау* деп аталады және $K_{v_i}^{a_i}$ (немесе K_V^A) арқылы белгіленеді.

Мысалы. Айтайық, $A = \{a, b, c, d\}$ алфавиті және оның әріптерінің екілік кодталуы берілсін;

$a \rightarrow 01, b \rightarrow 100, c \rightarrow 101, d \rightarrow 0$.

0100 сөзін db немесе add деп декодтауға болады 0010100 сөзін $ddcdd$ немесе $daadd$ немесе $dadb$ деп декодтауға болады.

Өзімізге жақсы таныс атақты телеграфтық Морзе коды алфавитіндегі әріптерді (латын немесе орыс), олардың арасындағы тыныс белгілерін және цифрларды екі әріпті алфавитте («нүкте», «тире») кодтау. Бұл екілік кодтау болмайды. Себебі, Морзе кодында қосымша ажыратушы таңба бар: ол байланыс торабы бойынша хабар берілгенде уақыт бойынша (пауза), ал жазғанда – бос орын (пробел) бойынша ажыратылады.

Алфавит әріптерін кодтауда сөздері әріптері бойынша кодтауға көшкенде сәйкестіктің өзара бірімәнділік қасиеті сақтамауы мүмкін.

Мысалға, $K_e^n(n)$ әріптері бойынша кодтауда (5,6,1), (11,2,1) және (5,13) натурал сандар кортеждеріне 1011101 ($101*110*1$, $1011*10*1$, $101*1101$) түріндегі бір ғана сөз сәйкес келеді.

Сонымен, көрсетілген натурал сандарды әріптері бойынша кодтау өзара бірімәнді сәйкестік болмайды.

Егер алфавиттің барлық әріптерінің кодтарының ұзындықтары бірдей болса, онда код *бірқалыпты* деп аталады. Мысалы, E_n коды бірқалыпты.

3. $V = \{v_i\}$ (сөздер жиыны) кодында тек ғана әртүрлі сөздер бар деп

есептеуге болады. Егер $B = \{0,1\}$ алфавитіндегі әрбір $v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_k} = v_{j_1} v_{j_2} \dots v_{j_e}$

теңдігінен $k=l$ және $i_t = j_t, t=1,2,\dots,k$ сәйкестіктері шығатын болса, онда

$V = \{v_i\}$ – *ажыратылатын код* деп аталады.

Лемма-1. Әріптері бойынша кодтау өзара бірмәнді сәйкестік болуы үшін оның ажыратылатын кодтың көмегімен берілуі қажетті және жеткілікті.

Жоғарыдағы анықтамадан ажыратылатын кодтың барлық сөздерінің әртүрлі және бос болмайтындығын көреміз.

$\bigcup_{i=0}^{m-1} T(v_i)$ жиынын V жиынына бірмәнді бейнелейтін кез келген D бейнелеуін *декодтау* деп атаймыз. D декодтауын беру $\bigcup_{i=0}^{m-1} T(V_i)$ жиынын қилыспайтын $D^{-1}(v_i)$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, ішкі жиындарға жіктеумен пара-пар, мұндағы, әрбір $D^{-1}(v_i)$ аймағы D бейнелеуіндегі v_i сөздерінің кері бейнелерінен тұрады. D -кодтауында кез келген $v_i \in V$ сөзінде осы сөзді $T(V_i) \cap D^{-1}(V_i)$ жиынының кейбір сөзіне түрлендіретін қателер ғана, тек солар ғана түзетіледі. Жеке жағдайда, қарастырылып отырған тораптардағы барлық қателерді түзететін D кодтауы бар болуы үшін $T(v_i)$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, жиындарының қос-қостан алғанда қилыспауы қажетті және жеткілікті.

Бұл жағдайда байланыс торабы арқылы алынған кейбір Y хабарын өзі тиісті болатын кейбір X кодтық сөзінің аймағында анықтаймыз және X сөзі жіберілген (торап бойынша) деп қорытынды жасаймыз.

Мұндай қасиеті бар кодты берілген типті қателерді *түзететін код* деп атаймыз.

$V \subseteq B^n$ коды үшін s текті қатені түзету $T(X)$ жиынында X сөзінің S радиусты метрикалық аймағынан ықтау мен сәйкес келеді, яғни X -тен ең көп дегенде S -қашықтықтағы нүктелер жиыны. Сондықтан, $T(v_i)$ жиындарының қос-қостан алғанда қилыспайтын болу шарты кодтық арақашықтықтың $2s$ -тен артық болуымен ($d(V) > 2s$) пара-пар.

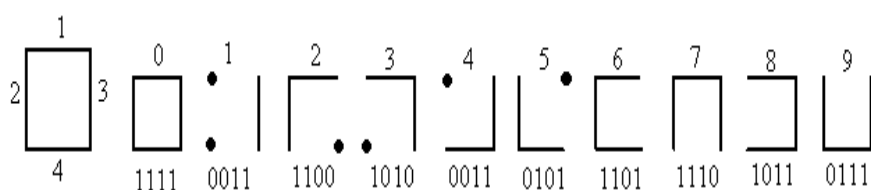
V коды S ауыстырулы түзетілетін код болуы үшін $d(V) > 2s$ болуы қажетті және жеткілікті, яғни, $d(V) \geq 2s + 1$, себебі $d(V)$ бүтін сан. Қателерді түзету есептері мен қатар қателерді табу жөніндегі қарапайым есептерді де қарастыруға болады. V кодын қолдануда кодтық сөзді басқа кодтық сөздерге түрлендіретін қателерді ғана табуға (анықтауға) болмайды.

Сондықтан, кодтық арақашықтығы d болатын V коды $(d-1)$ немесе одан кем жеке-дара алмастыру текті кодтарды әр уақытта анықтай алады.

Жоғарыда айтылғандардан байқайтынымыз, сырты кедергілерге тұрақты кодтауды қамтамасыз ету үшін ұзынырақ кодтауды қолдануға тура келеді.

Бұл кодтауда негізгі ақпараттар мен қатар қосымша мағлұматтар болуға тиісті.

Қосымша мағлұматтар хабар тарату барысындағы жіберілген қателерді анықтап немесе таратылған хабарды қайтадан қалпына келтіруге көмектеседі. 10 араб цифрын кодтау үшін жоғарыда келтірілген мысалдағыдай (пошта индексі) тоғыз екілік таңбаны қолданбай 4 таңбаны қолдансақ жеткілікті. Араб цифрларын кодтау 28-суретте көрсетілген.



Сурет 28. Араб цифрын кодтау операциясы

Бірақта, кодтаудың мұндай әдісінде $C_{10}^2 = 45$ пар кодтардың ішінде бір-бірінен тура бір разрядқа ажыратылатын 14 жұп код бар. Оларды бір ғана ауыстырудың нәтижесінде басқа кодпен оңай шатастырып алуға болады.

Шын мәнісінде, ондық цифрларды кодтаудың екілік сандағы тоғыз таңбалы кодтауын қолданамыз, мұнда тек бір ғана (0,8) (цифрлары) жұбында айырмашылық бір-ақ разрядта, ал қалған парларда ең кем дегенде үш разрядта айырмашылық бар.

Кодтаудың мұндай әдісінің тағы бір артықшылығы, ол өте ыңғайлы, себебі, ол араб цифрларын салуға (суретін салуға) ұқсас.

Сыртқы жағдайларға тұрақты код құрудың қарапайым әдісі *қайталау* (дублирование).

Егер таратылып (хабарланып) отырған сөздің әрбір әрпін $(s+1)$ -рет қайталасақ, онда әрбір код ауыстыру текті s қатені табуға қабілетті: қате жоқ болған жағдайда хабар $(s+1)$ - бірдей таңбалардан тұратын біртекті топқа (серия) бөлінеді; егер қате кеткен болса, тіптен егер барлық s қате топтың ішінде болса да, онда ол таңбаны немесе бірнеше таңбаларды анықтауға болады, себебі ол (олар) осы топтағы біртектілікті жояды.

Мысал. 2 қатеге дейін табуға болатын 01101 сөзді 00011111000111 түрінде кодтауға болады. Онда байланыс торабы арқылы 000010111000111 (*) хабарында алғанда оны үштіктерге бөлу керек: 000 010 111 000 111 сонда, екінші таңбада қате кеткендігі көрінеді.

Бірақ біз, таратылған хабарды қалпына (алғашқы қалпына) келтіре алмаймыз, (яғни, таратылған сөз 01101 деп тұжырымдауға болады және екінші таңбада екі бірдей қате кеткен деп айтуға болады), себебі, (*) хабарын екінші таңбада бірлік қате кеткенде 00101 сөзінен де алуға болады.

Осыған ұқсас таратылып отырған сөздегі әрбір таңбаны $(2s+1)$ рет қайталау жіберілген қатені анықтап қана қоймай сонымен қатар ауыстыру текті (s -ке дейінгі қателерді) s қатені түзете алады.

Жоғарыдағы мысалдағы 01101 сөзі

0000011111111110000011111 түрінде таралуға тиісті.

Екіден көп емес қате болған жағдайда, егер олар бір топтың ішінде болса да, топтың көпшілік әріптері ауыспаған және декодтауда дұрыс анықталады.

Егер, мысалға, алынған сөз 000001101111110000011111 болса, онда оны бес таңбадан топтарға бөлгенде; біріншіден, қатенің екінші таңбадан кеткенін, екіншіден, бастапқы әріптің бір болғанын көреміз. (таңбалардың ауысу саны топ ұзындығының жартысынан кіші.)

Әріректе біз тек ғана ауыстыру (алмастыру) текті бірлік қателерді қарастыратын боламыз.

Бұл қарапайым әдіс кезінде мүмкін бірлік қателерді анықтау үшін таратылатын (хабарланатын) сөздің ұзындығын екі есе, ал ол қатені түзету үшін оның ұзындығын үш есе ұзартуға тура келеді.

Бірақ, бұдан да үнемдірек, сыртқы кедергіге тұрақты кодтау да болуы мүмкін.

Бұл әдістің негізі келесіде:

Екілік сөздер жиынында анықталған кейбір функция қарастырылады. Ізделініп отырған код осы функция белгілі бір нақты мән қабылдайтын B^n жиынының сөздер жиыны түрінде анықталады.

Бұл функцияны келесі шарттарды қанағаттандыратындай етіп таңдап аламыз:

а) кез келген бірлік қателіктерде функцияның мәні өзгерсін.

б) функцияның мәнінің өзгеруіне сәйкес (мүмкін алынған сөз бойынша) қатенің орны және түрі бізмәнді анықталсын.

Біз осындай кодтаудың бір мысалы болып табылатын Хемминг кодын қарастырайық.

n - санын белгілеп алайық және оған қатысты $2^{l-1} \leq n < 2^l$ теңсіздігін қанағаттандыратын l санын табайық. Бұл жағдайда, $l = \lceil \log n \rceil + 1$.

Мысалға, $l(5) = l(7) = 3$, $l(8) = l(10) = l(13) = 4$. Кез келген

$X = x_1 x_2 \dots x_n \in B^n$ сөзі үшін

$$H(X) = x_1 e_e(1) \oplus x_2 e_e(2) \oplus \dots \oplus x_n e_e(n) \quad (48)$$

деп алайық.

$H(X)$ – ұзындығы l – болатын вектор.

Бұл вектор X сөзінің бірлік таңбаларының номерлерінің екілік жазылуындағы векторларды қосу нәтижесінде алынған.

Мысалы. Айталық $n=6$, $X=010101$ және $Y=110100$ болсын. Онда $l = l(6) = 3$.

$$H(X) = (0,1,0) \oplus (1,0,0) \oplus (1,1,0) = (0,0,0)$$

$$H(Y) = (0,0,1) \oplus (0,1,0) \oplus (1,0,0) = (1,1,1)$$

Теорема. $X = x_1 x_2 \dots x_n \in B^n$ түріндегі барлық сөздерден тұратын $H(X) = (0,0,\dots,0)$ (*) шартын қанағаттандыратын *Хемминг коды* H_n бір алмастыруды түзететін код болады.

Жоғарыда қарастырылған мысалда

$$X \in H_6, Y \notin H_6.$$

Мысал. Айталық $X = 010101 \in H_6$ сөзінде бесінші таңбаның алмастырылуынан $T=010111$ сөзі пайда болсын.

$$H(T) = (0,1,0) \oplus (1,0,0) \oplus (1,0,1) \oplus (1,1,0) = (1,0,1)$$

болғандықтан $H(Y)$ сөзінің сандық мәні 5-ке тең және ол алмастырылған таңбаның номерін анықтайды.

$$H_n \text{ кодының элементтерінің саны } |H_n| = 2^{n-l}.$$

Себебі, $(n-l)$ компоненттердің мәндерінің кез келген берілуінде (*) шартымен $2^0, 2^1, \dots, 2^{l-1}$ (тексерілу позициялар) номерлі компоненттердің мәндері және номерлері $2^0, 2^1, \dots, 2^{l-1}$ (ақпараттық позициялар) номерлі компоненттердің мәндерінен өзгеше мәндері бірімәнді анықталады.

$$l = \lceil \log n \rceil + 1 = \lceil \log(n+1) \rceil \text{ болғандықтан}$$

$$\frac{2^{n-1}}{n} \leq |H| = 2^{n-\lceil \log(n+1) \rceil} \leq \frac{2^n}{n+1}.$$

$$\text{Жеке жағдайда, } |H_6| = 2^{6-\lceil \log 7 \rceil} = 2^{6-3} = 2^3 = 8.$$

Төменде H_6 коды келтірілген.

$$H_6$$

0 0 0 0 0 0

1 1 1 0 0 0

1 1 0 0 1 1

0 0 1 0 1 1

1 0 1 1 0 1

0 1 0 1 0 1

0 1 1 1 1 0

1 0 0 1 1 0

Мұндай кодтық жиынмен ұзындығы үш болатын барлық сөздерді кодтап шығаруға болады, олардың саны сегіз. Ол үшін кез келген өзара бірімді сәйкестікті алсақ жеткілікті.

Р. Хемминг кодтаудың келесі әдісін ұсынды.

Бұл кодтау қарапайым және ыңғайлы декодтауды қамтамасыз етеді.

Ол үшін ұзындығы m болатын X сөзі l тексерушісі разрядтарға дейін толықтырылады. ($l = \lceil \log(m+1) \rceil$). Нәтижесінде алынған X хабары (ақпараты) m -ақпараттық және l -тексеруші позицияларға бөлінеді және кодтау кезіне белгілі бір анықталған ретпенен есептеледі.

Тексеруші разрядқа 1-ші, 2-ші, 4-ші, 8-ші ж.т.т. – 2-нің бүтін дәрежесі болатын разрядтық номерлер сәйкес қойылады. Олардың екілік өрнектелулерінде тура бір бірлік бар. Қалған орындарға: 3,5,6,7,9,10,... кодталушы X сөзінің таңбалары орналастырылады.

Төмендегі екі мысалда Хемминг бойынша кодтаудың қалай орындалатындығы көрсетілген.

Айталық, кодталатын сөз $X = 1000$: $m = 4$, $l = \lceil \log 5 \rceil = 3$.

Ұзындығы $m + l = 7$ болатын хабардың түрі $p_1 p_2 1 p_4 100$ болады $p_1 p_2 p_4$ тексеруші символдар келесі түрде есептеледі. p_i информациялық таңбалары сәйкес 2 модулі бойынша қосындыға тең, номерлері екілік өрнектелуінде бірлер болатын p_i -номерлеріне тең, яғни, оң жақтағы i -ші разряд:

p_1 1-ші разрядта, p_2 2-ші разрядта, p_4 3-ші разрядта (кесте - 10.)

$$p_1 = p_3 \oplus p_5 = 0; p_2 = p_3 = 1; p_4 = p_5 = 1.$$

Нәтижесінде $X' = 0111100$ - сөзін аламыз.

Кез келген әртүрлі X, Y сөздерінің Хэмминг бойынша кодтауларының бейнелері X', Y' бір-бірінен ең кем дегенде үш разрядқа ажыратылатындығын және олардың бірлік қателерді түзетуді қамтамасыз ететіндігін көрсетейік.

1) $\rho(X, Y) \geq 3$, яғни X, Y бір-бірінен үш немесе одан да көп разрядта ажыратылады: кодталғанда осы айырмашылықтар сақталады; тексеруші разрядтарда бұл айырмашылықтар артуы мүмкін, яғни $\rho(X', Y') \geq 3$.

2) $\rho(X, Y) = 2$, яғни, X, Y бір-бірінен екі разрядта ажыратылады. Айталық, кодталған сөздерде бұл $\alpha \neq \beta$ позициялары болсын, яғни, α, β сандары сөздерінің екілік жазылуында ең болмағанда бір (i -ші) разрядымен ажыратылады, мысалға, α – да ол 0, ал β – да ол 1 немесе керісінше.

i -ші разрядқа сәйкес келетін тексеруші таңбаны есептегенде X', Y' сөздерінің тек ғана біреуінің 2 модулі бойынша қосындысында бір қатысады, яғни, 2^i позициясында, α мен β -дан өзгеше қалған позицияларда X және Y сөздері беттеседі. Яғни, 2^i –ші тексеруші позициясында X' және Y' сөздерінде бір-бірінен ажыратылады: қортындысында $\rho(X', Y') \geq 3$.

3) $\rho(X, Y) = 1$, яғни X, Y сөздері бір-бірінен тура бір разрядта ажыратылсын.

X және Y сөздерінің бұл ақпараттық разрядтарының номері 2 санының бүтін дәрежесіне тең, яғни, оның екілік жазылуында ең болмағанда екі бір бар.

Онда, X және Y сөздерінің сәйкес екі тексеруші разрядтары ажыратылады: қайтадан $\rho(X', Y') \geq 3$. Егер кодталған X сөзін таратуда бір қате жіберілген болса, онда алынған T сөзін декодтағанда $H(T)$ векторы, (екілік жазылуында оқылғанда) зақымдалған разрядтың номерін береді.

