

Дәріс №12

Ньютон биномы. Математикалық индукция.

Ньютон биномы. Екі қосылғыштың (биномның) қосындысының кез келген бүтін оң дәрежесін сол қосылғыштардың дәрежелері арқылы өрнектейтін формула:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n \quad (14)$$

Мұндағы $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномдық коэффициенттер, n – теріс емес бүтін сан.

Екі қосылғыштың қосындысының квадраты ($n=2$) мен кубы ($n=3$) Ньютон биномының дербес жағдайы болып есептеледі: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Ньютон биномы формуласының коэффициенттері биномдық коэффициенттер деп аталады.

Мысал. $n = 4$ болғанда мына формуланы аламыз:

$$(a + b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a b^3 + C_4^4 b^4 =$$

$$\text{Себебі: } C_4^0 = \frac{4!}{0!(4-0)!} = 1; C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4; C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6.$$

Биноминальды коэффициенттердің қасиеттері. Биномиальды коэффициентке n элементтен k бойынша теру санын өрнектейтін

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (15)$$

шамасы жатады. Бұл шамалар мынадай қасиеттерге ие болады.

Симметрия қасиеті.

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \quad (16)$$

Бином формуласында бұл формуланың оң жақ және сол жақ ұшында бірдей орында тұрған коэффициенттер мысалы, $C_6^2 = C_6^4 = \frac{6!}{2!4!} = 15$ тең дегенді білдіреді.

Расында да, C_n^k – бұл n элементтен тұратын жиынның k элементтен тұратын ішкі жиындарының саны. Ал C_n^{n-k} – бұл оларға қосымша ішкі жиындардың саны.

Паскаль қасиеті.

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \quad (17)$$

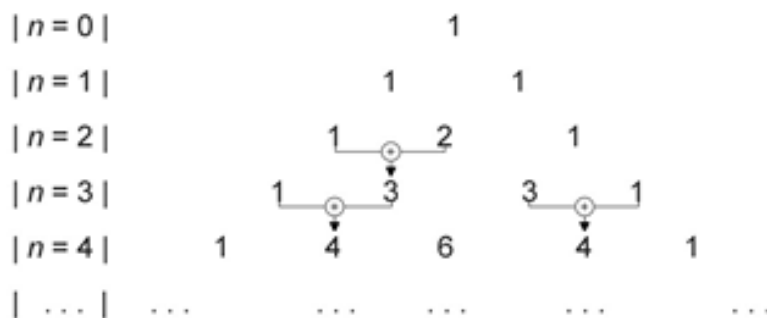
Айталық $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ болсын. C_n^k саны – бұл X жиынының k элементтен құралған ішкі жиынының саны. Барлық ішкі жиындарды екі классқа бөлейік:

1) Құрамында x_1 элементі жоқ ішкі жиындар, олардың саны C_{n-1}^k ;

2) Құрамында x_1 элементі бар ішкі жиындар, олардың саны C_{n-1}^{k-1} .

Бұл класстар қиылыспайтындықтан, онда қосынды ережесі бойынша X жиынының k элементтен құралған барлық ішкі жиындар саны $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ тең.

Осы қасиеттің негізінде Паскаль үшбұрышы құрылады (12-сурет), оның n -ші жолында $(a+b)^n$ биномдық жіктеудің коэффициенттері жатады.



Сурет 12. Паскаль үшбұрышы

Қосындының қасиеті.

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n. \quad (18)$$

Ньютон биномы формуласына қояйық

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \quad \text{мәні } a=1, b=1.$$

$$\text{Бұдан } 2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k \text{ аламыз.}$$

Айырманың қасиеті.

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0. \quad (19)$$

Ньютон биномы формуласына $a=1, b=-1$ қояйық. Сол жақ бөлігінен $(1-1)^n = 0$, ал оң жақ бөлігінен таңбасы ауысып отыратын биноминальдық коэффициенттерді аламыз, ал бұл қасиеттің дәлелдеуі болып табылады.

Соңғы қасиетті барлық теріс таңбалы коэффициенттерді формуланың сол жағына шығару арқылы жазу ыңғайлы болады: $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = C_n^0 + C_n^2 + \dots$,

Мысал. Құрамында x жоқ $\left(x + \frac{1}{x^4}\right)^n$ биномдық жіктеудің мүшелерін табу керек, егер тақ нөмірлі биноминальдық коэффициенттердің қосындысы 512-ге тең болса.

Шешуі. Айырманың қасиеті бойынша тақ нөмірлі биноминальдық коэффициенттердің қосындысы да 512-ге тең, ендеше, барлық коэффициенттердің қосындысы мынаған тең $512+512=1024$. Алайда қосындының қасиеті бойынша бұл сан мынаған тең $2^n = 2^{10} = 1024$. Сондықтан $n = 10$. Биномдық жіктеудің жалпы мүшесін жазып оны түрлендірейік:

$$T_{k+1} = C_n^k a^k b^{n-k} = C_n^k x^k \left(\frac{1}{x^4} \right)^{n-k} = C_n^k x^{k-4n+4k}, \quad k = 0, 1, \dots, n;$$

$n = 10$ болғанда мынаны аламыз:

$$T_{k+1} = C_{10}^k x^{5k-40}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

T_{k+1} жіктеу мүшесінің құрамында x жоқ, егер $5k - 40 = 0$, яғни $k = 8$. Сонымен жіктеудің тоғызыншы мүшесінің құрамында x жоқ және ол мынаған тең $T_9 = C_{10}^8 = \frac{10!}{8!(10-8)!} = 45$.

Максимум қасиеті. Егер n биномының дәрежесі – тақ сан болса, онда $k = \frac{n}{2}$ болғанда биноминальды коэффициенттердің арасында бір максималдысы болады. Егер биномның дәрежесі тақ болса, онда максималды мәнге екі биноминальды коэффициент үшін $k_1 = \frac{n-1}{2}$ және $k_2 = \frac{n+1}{2}$ болғанда жетеді. Сонымен $n = 4$ болғанда максималды коэффициент $C_4^2 = 6$ ал $n = 3$ болғанда максималды мән $C_3^1 = C_3^2 = 3$ тең.

Математикалық индукция. Индукция (латынша – қоздыру, тудыру) – дербес жеке түсініктер негізінде ақиқаттығы пайымдалатын жалпылама түсінік тұжырымдау.

$$\sqrt{-n} = \sqrt{(-1) \cdot n} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{n}$$

Математикалық индукция – аксиомалар негізінде жалпы түсінік дәлелдеу әдісі.

Толымсыз индукция – дербес түсініктердің кейбір жайттары (толық емес) ғана ескеріліп жалпылама түсінік тұжырымдау әдісі.

Толымсыз индукция арқылы тұжырымдалатын қорытындының ақиқат та, жалған да болуы мүмкін. Осы кемістігіне қарамастан сандар қасиеттерін зерттеуде бұл әдістің маңызы ерекше. Сандардың қасиеттері көпшілік жағдайда бақылаулар нәтижесінде ашылып, соңынан дәлелденіп отырған. Математикалық индукция принципі – натурал x параметріне тәуелді $A(x)$ түсінігі $A(1)$ үшін дәлелденген болса және кез келген n натурал сан үшін $A(n)$ пікірі де тура деп қабылданатын болжамнан $A(n+1)$ үшін де тура болатындығы дәлелденсе, онда $A(x)$ түсінігі x -тің барлық натурал мәні үшін орындалады.

Бұл әдістің мазмұны мынадай: дәлелденетін түсінік бір дербес жағдай үшін, айталық $n = 1$ пікір үшін тексерілген болсын. Осы пікірдің $n = k$ болған кезде де тура болатындығынан бұл пікірдің n -нің келесі мәні, яғни $n = k + 1$ үшін де тура болады, $n = 2$ -ге тең болған кезде дұрыс болуы себепті, ол $n = 2 + 1 = 3$ болған кезде де орындалады т.с.с. пікір n -нің барлық мәндерінде тура болады. Олай болса, кез келген натурал n үшін қандай да бір түсінікті дәлелдеу үшін, екі сатылы дәлелдеме қажет: бірінші сатыда пікірдің $n = 1$ болған жағдайда тура болатындығы және екінші сатыда осының әрқашан тура болуы себепті оның $n = k$ болған кезде тура болуынан бұл пікірдің $n = k + 1$ болған жағдайда да тура болатындығы тұжырымдалды.

Мысал. Әрбір натурал n саны үшін төмендегі тұжырымдарды дәлелдендер:
Шешуі.

1) $n^3 + 5n : 6$

Шешуі. $n^3 + 5n = n^3 - n + 6n = (n^3 - n) + 6n = n(n-1)(n+1) + 6n$

1) $n(n-1)(n+1)$ өрнегі 3 натурал санның көбейтіндісі болғандықтан әрқашан 6-ға бөлінеді.

2) $6n$ барлық натурал n мәндерінде 6-ға бөлінеді

3) Егер әрбір қосылғыш 6-ға бөлінсе, онда барлық қосынды да 6-ға бөлінеді. Сонымен $n^3 + 5n$ барлық натурал n үшін пікір ақиқат.