

Дәріс №11

Қосу және көбейту ережесі. Комбинаториканың негізгі принципі.

Теориялық зерттеу тұрғысынан алғанда комбинаторика алғаш рет XVII ғасырдағы Паскаль, Ферма, Лейбниц және XVIII ғасырдағы Я. Бернулли, Эйлер еңбектерінде қарастырылған.

Қазіргі кезде комбинаторика математика салаларының ішінде өте жедел дамып отырған бөлігіне айналды. Бұған себеп болып отырған бұл теорияның электрондық есептегіш машиналарға, информация мен ықтималдықтар теориясына кеңінен қолданылуы. Дискреттік деп аталып жүрген математиканың өзінде де көп ықпалын тигізген, міне осы қосылыстар теориясы.

Қосу ережесі.

Кез келген санаулы элементтері бар A және B жиындары үшін

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

(1)

тендігі орындалады.

Ал бұдан

$$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B) \quad (2)$$

математикалық индукция принципі бойынша бірнеше қосылғыштарға жазып шығуға болады.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \quad (3)$$

Көбейту ережесі. Кез келген санаулы элементтері бар A және B жиындары үшін барлық (a, b) , $(a \in A, b \in B)$ қос элементтер саны m осы жиындар элементтері сандарының көбейтіндісіне тең.

$$m = n(A) \cdot n(B)$$

Элементтердің парлары. r және s элементтерден тұратын $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ мен $B = \{b_1, \dots, b_s\}$ жиындарының әрқайсынан бір-бірден элемент алып жасалған және де бірінші орында $a_i \in A$ элементі, ал екінші орында $b_j \in B$ элементі жазылған (a_i, b_j) қосылыстарын *парлар* деп атайды. Мұндай барлық парлардың саны rs көбейтіндісіне тең.

Комбинаториканың негізгі принципі. $A_1, A_2, \dots, A_k$ жиындары берілсін. Осы жиындардың жазылу нөмірлеріне қарап, бұл міндетті түрде, бір-бірлеп, $a_{n_1} \in A_1, a_{n_2} \in A_2, \dots, a_{n_k} \in A_k$ элементтерін алайық. Осындай тәртіппен алынған $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}$ элементтерін кортеж деп атайды және ол былай жазылады $(a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k})$.

Теорема. (Көбейтіндінің теоремасы). $A_1, A_2, \dots, A_k$ жиындарының элементтерінен жасалған барлық кортеждердің саны $n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_k)$ көбейтіндісіне тең.

Дәлелдеу. Математикалық индукция әдісін қолданамыз. Индукцияны k бойынша жүргіземіз. $k=2$ болсын. $a_{n_1} \in A_1, b_{n_2} \in A_2$ элементтерінен (a_{n_1}, b_{n_2}) кортежін құрайық. Сонда кортеж парға айналды. Сөйтіп мұндай кортеждердің

саны $n(A_1) \cdot n(A_2)$ көбейтіндісіне тең. Сонымен, $k=2$ үшін теорема дәлелденді. Енді теореманы $k-1$ үшін орынды деп ұйғаралық. Сонда $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ жиындарының барлық элементтерінен жасалған кортеждердің саны $n(A_1) \cdot n(A_2) \cdots n(A_{k-1})$ көбейтіндісіне тең болады. Енді $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ және A_k жиындарының элементтерінен кортежді былай жасаймыз: $((a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_{k-1}}), a_{n_k})$. Парлар принципі бойынша мұндай кортеждер саны үшін $(n(A_1) \cdot n(A_2) \cdots n(A_{k-1}))n(A_k) = n(A_{k-1})n(A_k)$ теңдігі келіп шығады. Теорема толық дәлелденді.

Терулер. n элементтерден тұратын M жиынын қарастырайық. n – элементтен k – дан жасалған теру деп M жиынының k элементтерінен тұратын ішкі жиынын айтады.

Бұл анықтама бойынша, теру бір-бірінен өзгеше болуы үшін оларды жасап тұратын элементтерінің ең болмағанда біреуінде өзгешелік болуы керек.

Мысалы, $\{1, 2, 3\}$ және $\{1, 3, 2\}$ бір ғана теру, өйткені бұлардың элементтерінің арасында ешқандай айырмашылық жоқ. n элементтен k -дан жасалған терулердің саны үшін C_n^k белгілеуі қолданылады. Бұны оқығанда « n элементтен k -дан жасалған теру саны» деп оқиды.

1-ден бастап, n -ге дейінгі натурал сандардың көбейтіндісі үшін $n!$ белгілеуі енгізіледі. Сөйтіп, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Дәлелдеуін келтірмей-ақ терулердің сандарын есептейтін формулаларды берейік.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{немесе} \quad C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \quad (4)$$

мұндағы $0 < k \leq n$.

Математикада $C=1$ теңдігін қабылдау келісілген.

Теру сандарын есептеу барысында оны жеңілдететін бір формуланы келтірейік.

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (5)$$

Мұны дәлелдеп алу (4) формулалар арқылы қиын емес. (5) формуланы пайдаланғанда $k > \frac{n}{2}$ болғаны жөн.

$C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$ теру сандарын биномдық коэффициенттер деп атайды. Барлық биномдық коэффициенттердің қосындысы 2^n -не тең. Бұл Ньютон биномының

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n \quad (6)$$

жіктеуіндегі a мен b -ның орындарына 1-ді қойғаннан келіп шығады.

Сонымен мынадай қорытындыға келдік: n элементтерден тұратын жиынның барлық ішкі жиындарының саны 2^n -не тең.

4.Орналастырулар. n элементтен тұратын $M=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ жиынынан k көлемді кортеж құралық. Бұл жерде « k көлемді кортеж» деп отырғанымыз кортежге енетін элементтердің саны k -ға тең болатындығын көрсетеді. M жиынынан $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$ кортежі екі түрлі әдіспен жасалуы мүмкін: бірі – кортежге M жиынының бір элементі бір-ақ рет енуі мүмкін; екіншісі – кортежге M жиынының бір элементі бірнеше рет кіруі мүмкін. Бірінші

жағдайда кортеждерді n элементтен k -дан жасалған *орналастырулар* деп, екінші жағдайда кортеждерді n элементтен k -дан жасалған *қайталамалы орналастырулар* деп атайды.

Теорема. n элементтен k -дан жасалған орналастырулар саны

$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ көбейтіндісіне, ал қайталамалы орналастырулар саны n^k -не тең.

Дәлелдеу. Орналастыруларды былай жасап шығалық: алдымен M жиынынан a_{i_1} элементін аламыз; содан кейін қалған $n - 1$ элементтердің ішінен a_{i_2} элементін аламыз. Кортеж элементтерін тағы да сол сияқты біртіндеп ала отырып, ақырында, қалған $n - (k - 1)$ элементтердің ішінен a_{i_k} элементін аламыз. Сөйтіп, $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$ кортежі шығады. Сонда, көбейтіндінің теоремасы бойынша, барлық кортеждердің саны $n(n-1)\dots(n-k+1)$ көбейтіндісіне тең болады. Теореманың бірінші бөлігі дәлелденді. Енді қайталамалы орналастыруларды жасап шығалық: алдымен M жиынынан a_{i_1} элементін аламыз да, оны тіркеп болғаннан кейін M жиынының өзіне қайта оралтамыз; содан кейін M жиынынан тағы да a_{i_2} элементін аламыз және оны тіркелгеннен кейін қайтарамыз. Міне, осы процесті қайталай отырып, $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$ кортежін жасап шығамыз. Сонда көбейтіндінің теоремасы бойынша мұндай кортеждердің саны $n \cdot n \cdot \dots \cdot n^k$ -не тең болады. Теорема толық дәлелденді. n элементтен k -дан жасалған орналастырулар саны үшін $\tilde{A}_n^k$ белгілеулерін енгізсек:

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (7)$$

$$\tilde{A}_n^k = n^k \quad (8)$$

5.Алмастырулар. n элементтен n -нен жасалған орналастыруларды *алмастырулар* деп атайды. n элементтен жасалған алмастырулар санын P_n арқылы белгілейді. Сонымен,

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n. \quad (9)$$

Анықтама. a_1 элементі k_1 рет, a_2 элементі k_2 рет, тағы сол сияқты a_m элементі k_m рет кездесетін $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ көлемді кортеждерді n -ші ретті *қайталамалы алмастыру* деп атайды.

Қайталамалы алмастырулардың саны үшін $C_n(k_1, \dots, k_m)$ белгілеуін қолданамыз. Сонда, мына формуланың орынды болуын дәлелдеп алу қиын емес:

$$\bar{P}_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} \quad (10)$$

6.Қайталамалы терулер. N элементтен k -дан жасалған *қайталамалы терулер* деп әрқайсысы k элементтен тұратын топтарды айтады және де әрбір элемент осы n топтардың біреуіне тиісті. Барлық қайталамалы терулер санын C_n^k арқылы белгілейміз.

Теорема. n элементтен k -дан жасалған қайталамалы терулер саны мына формуламен анықталады:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k \quad (11)$$

Дәлелдеу. Әрбір қайталамалы теруге бір және тек қана бір қайталамалы алмастыру сәйкестендіруге болады. Міне осы сәйкестікті қалай орнатуға болатындығын көрсетейік. Мысалдар келтірейік a, b, c және d элементтерінен $aaabbcdddd$ және $abbbbbbbbd$ терулерін жасайық. Қандай да болмасын бір элемент қанша рет қайталанса, сонша рет 1 жазамыз, әр түрлі екі элементке сәйкес бірлердің арасына 0 жазамыз; егер белгілі бір элемент теруге қатыспаса, онда 0 жазамыз. Сонда 0 мен 1-лерден жасалған $n+k-1$ ретті қайталамалы алмастырулары шығады, ал бұларда 0 цифры $n-1$ рет және 1 цифры k рет кездеседі, $aaabbcdddd$ теруіне 111011010111 алмастыруы, $abbbbbbbbd$ теруіне 101111111001 алмастыруы сәйкес келеді.

Сонымен ізделінді C_n^k саны 0 цифры $n-1$ рет және 1 цифры k рет кездесетін қайталамалы алмастыру санына тең, яғни

$$C_n^k = \frac{(n+k-1)}{k!(n-1)!} \quad (12)$$

Енді (4) формуланы ескерсек,

$$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)}{k!(n-1)!} \quad (13)$$

Соңғы екі теңдіктен (13) формула шығады.