

Дәріс № 7

Логика алгебрасының функциялары. Мінсіз дизъюнктивті қалыпты форма. Мінсіз конъюнктивті қалыпты форма.

Логика алгебрасының функциялары.

Логика алгебрасын P_2 арқылы белгілейік.

Анықтама. $B_2 = \{0,1\}$ – негізгі жиын (айнымалылардың бастапқы мәндері), онда $B_2^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in B_2, i = \overline{1, n}\}$ болсын. Бұл жағдайда $f(x_1, \dots, x_n) : B_2^n \rightarrow B_2$ функциясын *толық анықталған логика алгебрасының* (немесе *буль функциясы*) *функциясы* деп атаймыз. Анықтамадан логика алгебрасының аргументтері де, функцияның мәндері де тек ғана 0 немесе 1 болады. Бұндай функцияларды кесте арқылы немесе басқа қарапайым функциялардың суперпозициясы арқылы беруге болады. Мысалы айнымалылар саны $n = 1$ болғанда

x	0	1	$\bar{x}$	$\bar{\bar{x}}$
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Бұл жағдайда 0 функциясы – *нөлдік константа*, 1 функциясы – *бірлік константа*, x – *тепе-теңдік функциясы*, ал $\bar{x}$ функциясы x функциясының *терістеуі* деп аталады. Кей жағдайларда соңғы функция үшін $\bar{x} \equiv \neg x$ белгілеуі қолданылады.

Енді логика алгебрасының функциясының аргументтер саны $n = 2$ үшін ондай функциялардың тізімін келтірейік. Ол үшін екі аргументті функцияларға сәйкес барлық мүмкін ақиқаттық мәндерді бір кестеге жинайық.

Екі айнымалы логикалық функциялар тізімі.

№	Логикалық функцияның аты	Логикалық функцияның жазылуы	Логикалық функцияның оқылуы
f_0	“0” константасы	0	“нөл”
f_1	Конъюнкция (логикалық “және”)	$(x_1 \cdot x_2)$	“ x_1 және x_2 ”
f_2	Импликацияны терістеу	$\neg(x_1 \rightarrow x_2) = x_1 \cdot \bar{x}_2 = \neg(\bar{x}_1 \vee x_2)$	“егер x_1 , онда x_2 емес”
f_3	Бірінші аргументті қайталау	x_1	“ x_1 ”
f_4	Кері импликацияны терістеу	$\neg(x_2 \rightarrow x_1) = \bar{x}_1 \cdot x_2 = \neg(x_1 \vee \bar{x}_2)$	“егер x_2 , онда x_1 емес”
f_5	Екінші аргументті қайталау	x_2	“ x_2 ”
f_6	Эквиваленттілікті терістеу (2 модулі бойынша қосу)	$\neg(x_1 \leftrightarrow x_2) = (x_1 \oplus x_2) = (\bar{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2)$	“не x_1 , не x_2 ”
f_7	Дизъюнкция (логикалық “немесе”)	$(x_1 \vee x_2)$	“ x_1 немесе x_2 ”
f_8	Дизъюнкцияны терістеу (Пирс жебесі)	$\neg(x_1 \vee x_2) = x_1 \downarrow x_2 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$	“ x_1 емес және x_2 емес”

f_9	Эквиваленттілік (пара-парлық)	$(x_1 \leftrightarrow x_2) = (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \vee x_1 \cdot x_2)$	“ $x_1 - x_2$ сияқты”
f_{10}	Екінші аргументті терістеу	$\overline{x_2}$	“ x_2 емес”
f_{11}	Кері импликация	$(x_2 \rightarrow x_1) = \overline{x_2} \cdot x_1$	“егер x_2 болса, онда x_1 ”
f_{12}	Бірінші аргументті терістеу	$\overline{x_1}$	“ x_1 емес”
f_{13}	Тура импликация	$(x_1 \rightarrow x_2) = \overline{x_1} \cdot x_2$	“егер x_1 болса, онда x_2 ”
f_{14}	Конъюнкцияны терістеу (Шеффер штрихы)	$\overline{(x_1 \cdot x_2)} = x_1 \vee x_2$	“ x_1 емес немесе x_2 емес”
f_{15}	“1” константасы	1	“бір”

Кестені толтыру кезінде айнымалыларға сәйкес ақиқаттық кестесінің бағаналары лексикографиялық ретпен толтырылады (Екілік жүйедегі сандардың өсу немесе кему ретімен. Біз өсу ретімен келтірдік). Төмендегі кестеде осы реттің екі айнымалы логикалық функциялар үшін қалай орналасатыны келтірілген.

$Y=f(x_1; x_2)$			
$f(0;0)$	$f(0;1)$	$f(1;0)$	$f(1;1)$
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
50	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Сонымен логика алгебрасының 2 айнымалысы бар әртүрлі 16 функциясы болатынын көрдік. Енді n айнымалылы логика алгебрасының әртүрлі неше функциясы болатынын анықтайық.

Лемма 3.1. (Сөздер саны туралы). r әріптен тұратын $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ алфавитіндегі ұзындығы m -ге тең әртүрлі сөздер саны r^m болады.

Дәлелдеуі. m бойынша индукция. $m=1$ үшін тұжырым айқын. Енді лемманың тұжырымын $m-1$ үшін дұрыс деп есептейік, яғни ұзындығы $m-1$ болатын сөздер саны дәл r^{m-1} болсын. Әрбір осындай ұзындығы $m-1$ болатын сөздің соңына бір әріпті қосудың барлық мүмкіндігі r -ге тең. Ал ұзындығы $m-1$ болатын сөздер санының барлығы r^{m-1}

болғандықтан, ұзындығы m -ге тең сөздердің барлығы $r \cdot r^{m-1} = r^m$ болады. Лемма дәлелденді.

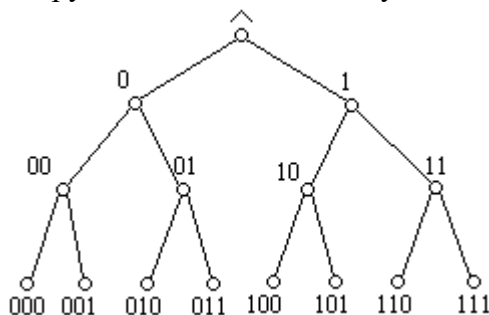
Енді n айнымалылы логика алгебрасының қандай да бір функциясы кесте арқылы берілсін.

$$2^n \left\{ \begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \dots x_n \\ \hline 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 1 \\ \dots & \dots \\ 1 & 1 \dots 1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} f \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_{2^n-1} \end{array} \right\} 2^{2^n}$$

Оны анықтау үшін оның 2^n тізімнен тұратын айнымалылар мәндеріндегі функцияның мәндерін анықтасақ жеткілікті. Демек n айнымалыдан тұратын барлық функциялар саны ұзындығы 2^n болатын нөл мен бірлерден тұратын барлық тізімдер санына тең, яғни жоғарыдағы сөздер саны туралы лемма бойынша бұндай логикалық функциялар саны 2^{2^n} болады.

Осы сан арқылы барлық 10 айнымалыдан тұратын функциялар санын бағалап көрелік: Бұл функциялар саны $2^{2^{10}} = 2^{1024} > 2^{1000} = (2^{10})^{100} > (1000)^{100} = 10^{300}$ санынан артық болады. Көріп отырғанымыздай, айнымалылар санының өсуі функциялар санының өте тез өсуіне алып келеді, демек бұл жағдайда функцияларды кесте арқылы беру тиімсіз.

Логикалық функциялар санын біз жоғарыда анықтадық. Енді сол санды анықтаудың көрнекті түрін – екілік ағаш арқылы анықтау тәсілін келтірейік. Біз 0, 1, 2 және 3 аргументті функцияларды олардағы ақиқаттық орналасулардың мүмкін жағдайларын әр деңгейге сәйкес орналастыру арқылы беруге болады. Көріп отырғанымыздай, бұл ағаштың тармақтарын ары қарай жалғастыру ешқандай қиындық туғызбайды.



Функциялар теңдігі.

Мектеп алгебрасынан $x + y - y = x$ теңдігінің орындалатынын білеміз, яғни функциялар теңдігі олардың неше айнымалылы болатынына әрқашан тәуелді бола бермейді (теңдіктің сол жағында екі айнымалылы, ал оң жағында бір айнымалылы функция жазылған). Демек, біз функциядағы *шынайы* және *жасанды* айнымалылар туралы айтуымызға болады.

Анықтама.

1) Егер x_i айнымалысы үшін $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in B_2$ мәндері табылып, $f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$ шарты орындалса, онда оны логика алгебрасының $f(x_1, \dots, x_n)$ функциясының **шынайы** айнымалысы деп айтамыз.

2) Тек x_i айнымалысында ғана өзгешелігі бар тізімдерді x_i айнымалысына қарағанда **көрші тізімдер** деп айтамыз. Кез келген x_i айнымалысына қарағанда көрші тізімдер үшін функция мәні өзгермесе, онда x_i айнымалысын берілген функцияға қарағанда **жасанды** айнымалы дейді.

Егер x_i айнымалысы f функциясына қарағанда жасанды болса, онда f функциясы қандай да бір $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ функциясымен эквивалентті болады. Кез келген функцияның кестесін жаңа жасанды айнымалылар енгізу арқылы қалағанымызша ұлғайтуға болады.

Анықтама. Егер берілген логика алгебрасының екі функциясының бірін екіншісінен жасанды айнымалыларды енгізу немесе аластау арқылы алуға болса, оларды **тең функциялар** деп айтады.

Енді логика алгебрасының формулалар ұғымын берейік. Бұл анықтама да пікірлер логикасындағыдай формуланың күрделілігі бойынша индукциялық анықтама болып табылады.

Формулалар.

Анықтама. Келесі функциялар жиыны берілсін:

$$A = \{f_1(\dots), f_2(\dots), \dots, f_n(\dots), \dots\}.$$

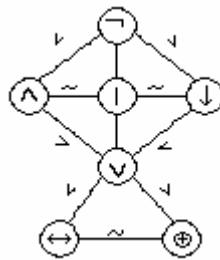
Осы A жиынында анықталған логика алгебрасының **формуласының** ұғымын енгізейік:

- 1) A жиынының кез келген функциясын A -да анықталған формула дейміз.
- 2) Егер $f(x_1, \dots, x_n) \in A$ және кез келген $i (1 \leq i \leq n)$ үшін H_i – айнымалы немесе A -да анықталған формула болса, онда $f(H_1, \dots, H_n)$ өрнегі де A -да анықталған формула болады.
- 3) A -да анықталған кез келген формуланы 1-ші және 2-ші ережелерді ақырлы рет қолдану арқылы аламыз.

Ескерту. $H_1, \dots, H_n$ тізімінің ішінде бірдейлері кездесуі әбден мүмкін.

Енді логикалық амалдарды орындау ретімен келісіп алайық.

Логикалық амалдар жиынында $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, |, \downarrow, \oplus\}$ оларды формулаларда орындау кезегі келесі транзитивтік қатынас бойынша анықтау келісілген. Орындау реті бірдей амалдар «солдан оңға қарай» ережесіне бағынады. Бұл тәртіпті келесі диаграмма арқылы береміз.



Енді бұрын келтірілген логикалық эквиваленттіліктерді логика алгебрасының амалдары үшін кеңейтіп келтіреміз.

Негізгі эквиваленттіліктер.

1. Ауыстырымдылық.

$$x \vee y = y \vee x, xy = yx, x \oplus y = y \oplus x, x \sim y = y \sim x.$$

2. Терімділік.

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z.$$

3. Үлестірімділік.

$$(x \oplus y)z = (xz) \oplus (yz), (x \vee y)z = (xz) \vee (yz), (xy) \vee z = (x \vee z) \cdot (y \vee z).$$

4. Де Морган заңдары.

$$\overline{\overline{x}} = x, \overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}, \overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}.$$

5. Сіңіру заңдары.

$$x \vee x = x, x \cdot x = x, x \vee \bar{x} = 1, x \cdot \bar{x} = 0, x \vee 1 = 1, x \cdot 1 = x, x \vee 0 = x, x \cdot 0 = 0.$$

6. Кейбір пайдалы эквиваленттіліктер.

$$x \mid y = x \cdot y, x \downarrow y = \bar{x} \vee \bar{y}, x \rightarrow y = \bar{x} \vee y, x \oplus y = (x \cdot \bar{y}) \vee (\bar{x} \cdot y).$$

Осы айтылған эквиваленттіліктермен бірге, түрлендіру кезінде келесі ережелерді есте ұстаған жөн.

Конъюнкция ережелері.

1. $x \cdot y = 1 \Leftrightarrow x = 1, y = 1.$
2. 1-ді (тавтологияны) конъюнкция кезінде ескермеуге болады.

Дизъюнкция ережелері.

1. $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0.$
2. Дизъюнкция кезінде 0-ді (қайшылықты) ескермеуге болады.

Ескерту. Формуланың мәнін анықтау кезінде конъюнкция дизъюнкция мен логикалық қосындыға қарағанда алдымен орындалады деп келісілген. Пікірлер логикасының амалдар туралы басқа келісімдері логика алгебрасында да сақталады. Бұл келісім формулаларды жазғанда ондағы жақшалар санын азайтуға мүмкіндік береді. Мысалы $x \cdot y \vee z$ формуласын $(x \cdot y) \vee z$ формуласының орнына, ал $x \cdot y \oplus z$ формуласын $(x \cdot y) \oplus z$ формуласының орнына қолданамыз.

Келесі **ережелер** логика алгебрасының салдарлары болып табылады және бұл ережелерді логикалық өрнектерді ықшамдау үшін қолданамыз.

1. Сіңіру ережесі:

$$x_1 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_2 x_3 = x_1.$$

2. Орам ережесі: Бұл екінші үлестіру заңының салдары:

$$x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 = x_1 \vee x_2;$$

$$\bar{x}_1 \vee x_1 x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2.$$

3. Кеңейту ережесі:

$$x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3.$$

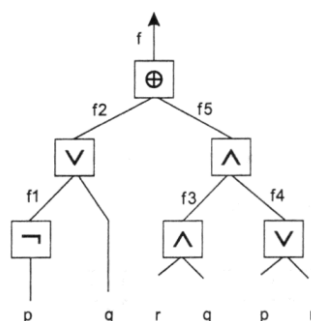
4. **Қапсыру ережесі:** Бұл ереже көрші конъюнкциялар ұғымына негізделген. Егер екі конъюнкция бір айнымалының ғана кескінімен айырмашылығы болса, онда оларды **көрші конъюнкция** деп атайды. Мысалы келесі конъюнкция парлары $x_1 x_2 x_3$ және $x_1 \bar{x}_2 x_3$, $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ және $x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ өзара көрші. Бірінші пардағы конъюнкциялар x_2 айнымалысының кескінімен, ал екіншісі x_1 айнымалысының кескінімен ажыратылып тұр. Қапсыру осы айнымалылар бойынша жүргізіледі.

Көрші конъюнкцияларды қапсыру кезінде, қапсыру амалы қайсы айнымалы арқылы жүргізілсе, сол айнымалы амалды орындау нәтижесінде түсіп қалады.

$$(a \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge b) = a, (a \vee \bar{b}) \wedge (a \vee b) = a.$$

Келесі суретте формуланың синтаксистік құрылымын анықтаудың тағы бір тәсілі – формуланы графикалық түрде кескіндеу тәсілі келтірілген.

$f = \neg p \vee q \oplus r q (p \vee r)$ формуласы берілсін. Онда оның синтаксистік құрылымы төмендегідей болады.



Логика алгебрасының функциясын айнымалылары бойынша жіктеу. Мінсіз дизъюнктивті қалыпты форма.

Алдымен келесі белгілеуді енгізейік: $x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{егер } \sigma = 1 \\ \bar{x}, & \text{егер } \sigma = 0 \end{cases}$.

Онда $x^\sigma = 1 \Leftrightarrow x = \sigma$ болады.

Теорема 3.2 (Л. алгебрасының функциясын айнымалылары бойынша жіктеу). Кез келген логика алгебрасының $f(x_1, \dots, x_n)$ функциясы мен кез келген $k (1 \leq k \leq n)$ үшін келесі теңдік орындалады:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} \in B_2^k} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Дәлелдеуі. Кез келген $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ тізімі үшін осы мәндерді қойып, теңдіктің оң жағындағы өрнекті есептейік. Ондағы дизъюнкция мүшелерінің ең болмағанда бір көбейткіші нөлге тең болса, бүкіл қосылғыш нөлге айналады. Сондықтан нөлдік емес дизъюнкция мүшелерінің ішінде тек біреуі ғана – $\alpha_i = \sigma_i$ болғандағы мүшесі ғана нөлге айналмайды. Онда

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} \in B_2^k} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = 0 \vee \dots \vee 0 \vee \alpha_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{\alpha_k} \cdot f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

Ал $x^x = 1$ болғандықтан бұл өрнек $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ шамасына тең. Демек функциялардың теңдігінің анықтамасы бойынша теңдіктің екі жағы да бір функцияны береді.

Салдар 3.3 Кез келген логика алгебрасының функциясының бір айнымалысы бойынша жіктеуі $f(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}_1 f(0, x_2, \dots, x_n) + x_1 f(1, x_2, \dots, x_n)$ түрінде жазылады.

Салдар 3.4 (Мінсіз дизъюнктивті қалыпты форма туралы). Кез келген нөлден өзге логика алгебрасының $f(x_1, \dots, x_n)$ функциясы үшін келесі теңдік орындалады:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) : f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \text{ (МДНФ)}.$$

Дәлелдеуі. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нөлден өзге функция болсын. Осы функцияның $k = n$ болғандағы жіктеуін жазайық:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} \in B_2^n} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n),$$

бұл өрнекті келесі түрде ашып жазуға болады:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) : f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \vee \dots \vee \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) : f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

Бірінші дизъюнкциядағы барлық дизъюнктер бірге, ал екінші дизъюнкциядағы дизъюнктердің барлығы нөлге тең болғандықтан теореманың тұжырымы дұрыс.

Салдар 3.5 (Мінсіз конъюнктивті қалыпты форма туралы). Бірден өзге кез келген логика алгебрасының $f(x_1, \dots, x_n)$ функциясы үшін келесі теңдік орындалады:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=0} (x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}) \text{ (МКНФ).}$$

Ескерту. Логика алгебралық функциясының МДНФ және МКНФ-сын табу үшін жоғарыда келтірілген 2.1 теоремасын дәлелдеу үшін қолданылған алгоритмді жүзеге асырсақ болады. МКНФ табу үшін функцияның ақиқаттық кестесін құрғанда ол 0-ді қабылдайтын жолдармен жұмыс істейтінімізді тағы да ескертеміз.

Мысал. $f(x, y, z, t) = (x \oplus z) \cdot (x \rightarrow t) \vee (y \rightarrow t)$ функциясына сәйкес МДНФ құрайық. Ол үшін берілген функцияға сәйкес ақиқаттық кесте құрамыз. Формуладағы конъюнкция дизъюнкциядан бұрын орындалатынын ескеру керек.

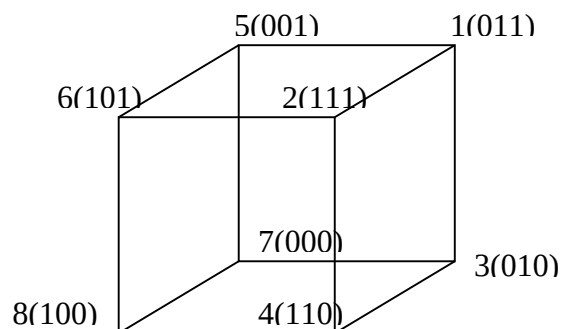
x	y	z	t	$x \oplus z$	$x \rightarrow t$	$(x \oplus z) \cdot (x \rightarrow t)$	$y \rightarrow t$	f
0	0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1	0	1	1

Сондықтан берілген формулаға сәйкес МДНФ және МКНФ келесі түрде болады:

МДНФ: $f(x, y, z, t) \sim \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot \bar{t} \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot t \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z \cdot \bar{t} \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z \cdot t \vee \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} \cdot \bar{t} \vee \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} \cdot t \vee \bar{x} \cdot y \cdot z \cdot \bar{t} \vee \bar{x} \cdot y \cdot z \cdot t$.

МКНФ: $f(x, y, z, t) \sim (x \vee \bar{y} \vee z \vee t) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee t) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t)$.

Сонымен кез келген логикалық функцияны МДНФ-ға келтіруге болады және МДНФ-ға келтіру алгоритмі ақиқаттық кестенің функцияның мәні 1-ге тең болатын жолдарын ғана пайдаланады. Бұл жағдай бір, екі және үш айнымалы логикалық функциялардың төмендегідей геометриялық кескінін табуға мүмкіндік береді. Үш айнымалы функция үшін үшөлшемді кубтың төбелерін келесі тәртіппен нөмірлейміз.



Онда бұл кубтың жақтарын (екіөлшемді ішкі кубтар) келесі литерлермен сәйкес қоюға болады:

$$\{2, 4, 6, 8\} - x_1$$

$$\{1, 3, 5, 7\} - \overline{x_1}$$

$$\{1, 2, 3, 4\} - x_2$$

$$\{5, 6, 7, 8\} - \overline{x_2}$$

$$\{1, 2, 5, 6\} - x_3$$

$$\{3, 4, 7, 8\} - \overline{x_3}$$