

№ 6 дәріс

Логикалық эквиваленттіліктер және олардың қолданылуы. Дизъюнктивті және конъюнктивті қалыпты формалар. Логикалық амалдардың толықтығы.

Анықтама. Құрамындағы әріптердің кез келген ақиқаттық мәндерінің орналасуында ақиқаттық мәндері бірдей болатын (ақиқаттық кестелеріндегі соңғы бағандары бірдей) φ және ψ формулалары *логикалық эквивалентті (пара-пар) формулалар* деп аталады.
Белгілеуі: $\varphi \sim \psi$.

Логикалық эквиваленттіліктердің ең маңыздыларын *логика заңдары* деп айтады. Пікірлер логикасының алгебрасында логика заңдары елеулі қызмет атқарады. Енді осы аталған ұғымдардың дәл анықтамасын берейік.

Логикалық эквивалентті формулаларды анықтау үшін олардың ақиқаттық кестесін құрып, салыстырсақ жеткілікті. Бірақ, эквивалентті формулаларды анықтау үшін көп жағдайда логика заңдарын қолданған әлдеқайда тиімді.

Төмендегі эквиваленттіліктерді *логика заңдары* деп айтамыз.

1. $(\varphi \wedge \varphi) \sim \varphi$ (идемпотенттілік заңы);
2. $(\varphi \vee \varphi) \sim \varphi$ (идемпотенттілік заңы);
3. $(\varphi \wedge \psi) \sim (\psi \wedge \varphi)$ (ауыстырымдылық заңы);
4. $(\varphi \vee \psi) \sim (\psi \vee \varphi)$ (ауыстырымдылық заңы);
5. $(\varphi \wedge (\psi \wedge \theta)) \sim ((\varphi \wedge \psi) \wedge \theta)$ (терімділік заңы);
6. $(\varphi \vee (\psi \vee \theta)) \sim ((\varphi \vee \psi) \vee \theta)$ (терімділік заңы);
7. $(\varphi \wedge (\psi \vee \theta)) \sim ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta))$ (үлестірімділік заңы);
8. $(\varphi \vee (\psi \wedge \theta)) \sim ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta))$ (үлестірімділік заңы);
9. $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi$, $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$ (сіңіру заңдары);
10. $\neg \neg \varphi \sim \varphi$ (қос терістеу заңы);
11. $\neg(\varphi \wedge \psi) \sim \neg \varphi \vee \neg \psi$, $\neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg \varphi \wedge \neg \psi$ (Де Морган заңдары);
12. $\varphi \wedge (\psi \vee \neg \psi) \sim \varphi$ (конъюнкциядағы тавтология заңы);
13. $\varphi \vee (\psi \wedge \neg \psi) \sim \varphi$ (дизъюнкциядағы қайшылық заңы).

Соңғы екі эквиваленттілікті былайша баяндауға болады: *Конъюнкцияда тавтологияны, қайшылықты дизъюнкцияда ескермеуге болады.*

Логикалық эквиваленттіліктер пікірлер логикасының көптеген формулаларын қарапайым түрге келтіруге мүмкіндік береді.

Анықтама. $(\dots(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \dots \wedge \varphi_n$ формуласын $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ формулаларының конъюнкциясы деп атайды және оны

$$\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$$

арқылы белгілейді. Егер жоғарыдағы конъюнкциядағы φ_i формулалары әріп немесе әріптің терістеуі болса, онда бұл формула *элементар конъюнкция* деп аталады.

Дизъюнкция үшін жоғарыдағы келісім бойынша

$$\bigvee_{i=1}^n \varphi_i = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$$

арқылы белгілесек, *элементар дизъюнкцияны* да жоғарыдағыдай анықтаймыз. Яғни, жоғарыдағы дизъюнкциядағы φ_i формулалары әріп немесе әріптің терістеуі болса, онда ол формула *элементар дизъюнкция* деп аталады. Енді дизъюнктивті қалыпты форма (ДҚФ) және конъюнктивті қалыпты форманың (КҚФ) анықтамаларын берелік.

Анықтама. Элементар конъюнкциялардың ақырлы дизъюнкциясын *дизъюнктивті қалыпты форма* (ДҚФ) деп атаймыз.

Формуланы дизъюнктивті қалыпты формаға келтірудің алгоритмі.

1. Формула құрамындағы барлық логикалық амалдарды $(\varphi \rightarrow \psi) \sim (\overline{\varphi} \vee \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi) \sim (\overline{\varphi} \vee \psi) \wedge (\overline{\psi} \vee \varphi)$, эквиваленттіліктер және $\downarrow, \oplus$ амалдарының анықтамаларын пайдаланып дизъюнкция, конъюнкция, терістеу арқылы өрнектейміз. (Дизъюнктивті қалыпты формаға түрлендіру)

2. Морган заңын пайдаланып, барлық терістеулерді айнымалыларға көшіріп, қос терістеулерді $\overline{\overline{X}} = X$ формуласы бойынша қысқартамыз.

3. Дистрибутивті $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \sim ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$ заңды пайдаланып, формуланы барлық конъюнкциялар дизъюнкциялардан бұрын орындалатындай түрлендіреміз. 1-3 пункттерді орындаудың нәтижесінде формула дизъюнктивті қалыпты формаға түрлендіріледі.

Анықтама. Элементар дизъюнкциялардың ақырлы конъюнкциясын **конъюнктивті қалыпты форма** (КҚФ) деп атаймыз.

Формуланы конъюнктивті қалыпты формаға келтірудің алгоритмі алдыңғыға ұқсас, тек 3 пунктін орнына $3'$ қолданылады.

$3'$ $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \sim ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$ дистрибутивті заңды пайдаланып, формуланы барлық дизъюнкциялар, конъюнкцияларға қарағанда бұрын орындалатындай етіп түрлендіреміз. Міне осылайша конъюнктивті қалыпты формаға келтіре аламыз. Осы берілген ұғымдарға байланысты арнайы теоремаларды жазайық:

Теорема 2.1 Пікірлер логикасының әрбір формуласына эквивалентті дизъюнктивті қалыпты форма табылады.

Дәлелдеуі. $A_1, \dots, A_n - \varphi$ формуласында кездесетін әріптердің тізімі болсын. Егер $f(x_1, \dots, x_n) - \varphi$ формуласына сәйкес логикалық функция болса, онда $\varphi = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$ болады. Алдымен φ формуласының ақиқаттық кестесін құрайық.

	A_1	A_2	...	A_j	...	A_n	$\varphi = f(A_1, \dots, A_j, \dots, A_n)$
i -ші жол	a	$ж$	...	$ж$	...	a	a
...				...			...

φ формуласының құрамында n әріп кездесетіндіктен, оның ақиқаттық кестесі 2^n жолдан тұрады, яғни $i \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$. Әрбір жолға $v_i : \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \rightarrow \{a, ж\}$ ақиқаттық функциясы сәйкес келеді. Әрбір v_i функциясына (i жолына) $c_i = B_1^i \wedge B_2^i \wedge \dots \wedge B_j^i \wedge \dots \wedge B_n^i$ формуласын сәйкес қоямыз. Мұндағы B_j^i конъюнктивті мүшелерін төмендегі шартпен анықтаймыз.

$$B_j^i = \begin{cases} A_j, & \text{егер } v_i(A_j) = a \\ \neg A_j, & \text{егер } v_i(A_j) = ж \end{cases}$$

C_i формуласын келесі тәртіппен құралық. Әрбір i -ші жолға сәйкес C_i формуласы v_i логикалық функциясы үшін $v_i(C_i) = a$ болатындай, ал $i \neq j$ болған жағдайда $v_j(C_i) = ж$ болатындай етіп таңдалады. Атап айтқанда, кестеде келтірілген i -ші жолға сәйкес C_i формуласы келесі түрде құрылады: $C_i = A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \dots \wedge \neg A_j \wedge \dots \wedge A_n$. Енді ψ формуласын φ формуласы ақиқат мәндер қабылдайтын жолдарға сәйкес C_i формулаларының

дизъюнкциясы – $\psi = \bigvee_{i \in \{1, \dots, 2^n\}} C_i$ ретінде алайық. C_i формулалары элементар конъюнкциялар болғандықтан, ψ – дизъюнктивті қалыпты форма және C_i формулаларының

анықтамасынан кез келген $i \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$ үшін $\bar{v}_i(\varphi) = \bar{v}_i(\psi)$ немесе $\varphi \sim \psi$. Теорема дәлелденді.

Жоғарыдағы теореманың дәлелдеу жолынан мынандай қорытындыға келеміз: егер әрбір формулаға ақиқаттық кесте сәйкес келсе, керісінше әрбір ақиқаттық кестеге қандай да бір формула сәйкес келеді. Бірақ, берілген ақиқаттық кестеге сәйкес формула біреу ғана болмайды. Дегенмен жоғарыдағы теоремадан берілген ақиқаттық кестеге сәйкес кез келген екі формуланың өзара логикалық эквивалентті формулалар болатынын көреміз.

Мысалы, төмендегі ақиқаттық кестеге сәйкес формула құрайық.

A_1	A_2	$f(A_1, A_2) = \theta$	
a	a	$жс$	$c_1 = A_1 \vee A_2$
a	$жс$	A	$c_2 = A_1 \wedge \neg A_2$
$жс$	a	$жс$	$c_3 = \neg A_1 \wedge A_2$
$жс$	$жс$	A	$c_4 = \neg A_1 \wedge \neg A_2$

Жоғарыдағы алгоритм бойынша, бұл кестеге

$$\psi = \bigvee_{i \in \{k | v_k(\theta) = a\}} c_i = c_2 \vee c_4 = (A_1 \wedge \neg A_2) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2)$$

формуласы сәйкес келеді.

Ескерту. Егер φ тавтология болса, онда $\varphi \sim A_1 \vee \neg A_1$ болады да, φ қайшылық болғанда $\varphi \sim A_1 \wedge \neg A_1$. Бұлар әрі ДҚФ, әрі КҚФ түріндегі формулалар. Жалпы жағдайда, кез келген элементар конъюнкция мен элементар дизъюнкция әрі ДҚФ, әрі КҚФ түріндегі формулалар болады.

Келтірілген теореманың дәлелдеуіндегі $жс$ мәнін a мәніне, конъюнкцияны дизъюнкцияға және дизъюнкцияны конъюнкцияға алмастырып, дәлелденген теоремаға **қосалқы** теореманы аламыз.

Теорема 2.2 (КҚФ туралы) Пікірлер логикасының әрбір формуласына логикалық эквивалентті конъюнктивті қалыпты форма табылады.