

Дәріс № 4

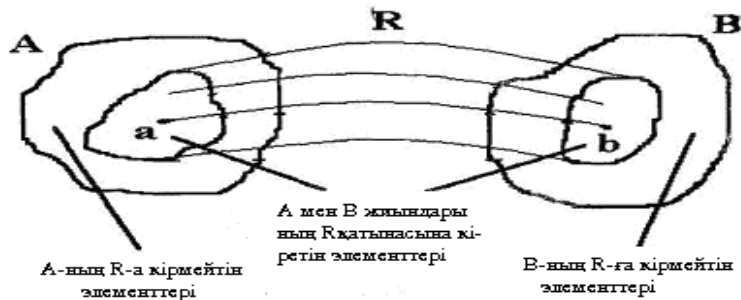
Қатынастар. Бинарлы қатынастар және берілу тәсілдері. Бинарлы қатынастарға қолданылатын амалдар, қасиеттері.

Қатынастар — жиын немесе жиындар элементтерінің арасындағы өзара байланыстарды беру тәсілдері. Қатынастардың ішінен унарлы, бинарлы қатынастар көбірек белгілі. Унарлы (бір орынды) қатынастар бір жиын элементтерінің белгілі бір R қасиетінің болуын бейнелейді. M жиынының R қасиетімен (белгісімен) ерекшеленетін элементтерінің жиыны M -ң бір ішкі жиынын құрайды. Мысалы, қобдишадағы шарлардың бір бөлігінің ақ болуы. Оларды унарлы қатынас деп атайды және R -мен белгіленеді, яғни $a \in R, R \subseteq M$.

Бинарлы қатынастар

Бинарлы қатынастар M жиынының бір жұп элементтерінің қандай да бір өзара қарым-қатынасын анықтауға қолданылады. Мысалы, M адамдар жиыны десек 2 адамның бір қалада тұруы, бір ұйымда қызмет істеуі, біреуінің екіншісінен жас болуы, әке мен бала болуы т. б.

Анықтама. Екі орынды немесе бинарлы P қатынасы деп A, B жиындарының декарт (тура) көбейтіндісінің (a,b) жұптарынан тұратын ішкі жиынын айтады және $(a,b) \in P, P \subseteq A \times B$ болып белгіленеді. $A - P$ қатынасының анықталу облысы, ал B мәндер облысы деп аталады. Айталық, $P \subseteq A \times B$ қатынасы мына суреттегідей кескінделсін:



Бинарлы қатынас бір жиынның ішінде болса, мысалы M жиынында болса P қатынасы $(a,b) \in P, P \subseteq M \times M = M^2$ немесе $(a,b) \in P, aPb$ болып белгіленеді. Жалпы жағдайда n орынды R қатынасы деп n жиынның тура (декарт) көбейтіндісінің R ішкі жиынын айтады:

$$R \subseteq M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$$

Егер $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R$, ал $(a_1 \in M_1, \dots, a_n \in M_n)$ болса, онда $a_1, a_2, \dots, a_n$ элементтері R қатынасында делінеді. Егер n орынды R қатынасы M жиынында болса, яғни $M_1 = M_2 = \dots = M_n$, онда $R \subseteq M^n$.

Бинарлық қатынастардың берілу тәсілдері.

Бинарлық қатынастар жиын болғандықтан, жиынның берілу тәсілдерінің бәрімен беріле алады. Ақырлы жиындарда берілген қатынастар әдетте төмендегідей әдістермен беріледі:

1. Бинарлы қатынас орындалатын жұптардың тізімі арқылы.

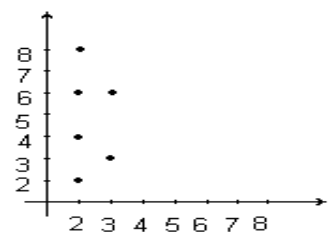
Мысалы, $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ жиыны берілсін. $P = \{(x,y) \mid x,y \in A, y \text{ } x\text{-ке бөлінеді және } x \leq 3\}$ бинарлы қатынасын $P = \{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (3,3), (3,6)\}$ түрінде жазуға болады.

2. Графиктік түрде: Графиктік кескіндеудің бірнеше түрлері бар:

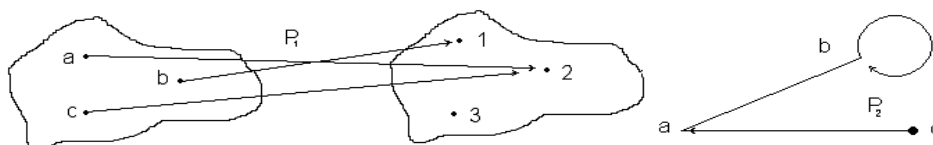
2.1. Координат өстеріне қатынастың элементтерін белгілеу арқылы. Алдыңғы мысалды графикалық түрде суреттегідей кескіндеуге болады.

2.2. A мен B жиындарының элементтерінің арасындағы P қатынасын стрелкалар арқылы көрсетуге болады.

Мысалы, $A = \{a,b,c\}; B = \{1,2,3\}$ жиындары берілсін. Олардың элементтерінің арасындағы



$P_1=\{(a,2),(b,1),(c,2)\}$ қатынасын төмендегідей кескіндеуге болады.



2.3. Граф арқылы да кескіндеуге болады. Мысалы, $P_2=\{(a,b),(b,b),(c,a)\}$ қатынасының граф түріндегі бейнесі болады.

3. Бинарлы қатынастың матрица арқылы берілуі.

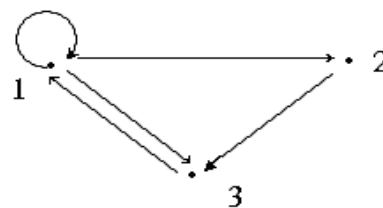
$A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ және $B=\{b_1, \dots, b_n\}$ ақырлы жиындары және $P \subseteq A \times B$ бинарлы қатынас берілсен. P бинарлы қатынастың $[P]=(P_{ij})$ $m \times n$ мөлшерлі матрицасын төмендегі ережемен анықтаймыз:

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{егер } (a_i, b_j) \in P \text{ егер бинарлық қатынас бар болса} \\ 0, & \text{егер } (a_i, b_j) \notin P \text{ егер бинарлық қатынас жоқ болса} \end{cases}$$

Алынған бұл матрица элементтер арасындағы байланыс туралы толық ақпарат береді және оны компьютерге өрнектеу мүмкіндігі бар.

Мысалы, суретте көрсетілгендей $P \subseteq A^2$ $A=\{1,2,3\}$ бинарлы қатынасының матрицасы

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; P = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,1)\}$$



2-мысал. $M=\{1,2,3,4,5,6\}$. Егер $P <$ қатаң кіші болуды білдірсе $P \subseteq M \times M$ қатынасын тізім және матрица түрінде бейнелеу керек: P қатынасы M жиынының $a < b$ болатын элементтер жұбынан тұрады. $P = \{(a,b) \mid a, b \in M; a < b\}$. Олай болса, P қатынасын тізім және матрицамен беруге болады: $P = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6)\}$.

Анықтама. Кез-келген жиын үшін анықталған $Id_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$ қатынасы тепе-теңдік қатынас немесе диагональ қатынас деп аталады, ал $U_A = A^2$ универсалды немесе толық қатынас деп аталады. Айталық, P – бинарлы қатынас болсын. $\delta_P = \{x \mid (x,x) \in P \text{ қандай да бір } Y \text{ үшін}\}$ жиыны P қатынасының анықталу облысы деп, ал $\rho_P = \{y \mid (x,y) \in P \text{ қандай да бір } X \text{ үшін}\}$ жиыны P қатынасының мәндер жиыны деп аталады.

Мысалы, $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ жиынының $P = \{(x, y) \mid x, y \in A, y \text{ } x\text{-ке бөлінеді және } x \leq 3\}$ қатынасы үшін $P = \{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (3,3), (3,6)\}$ қатынасымен $x=\{3\}$ үшін анықталу облысы $\delta_P = \{2,3\}$. Мәндер аймағы $\rho_P = \{2,3,4,6,8\}$;

Бинарлы қатынастарға қолданылатын амалдар.

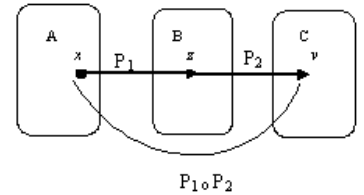
Бинарлы қатынастар $P \subseteq M_1 \times M_2$ ($P \subseteq M^2$, $M_1 = M_2 = M$) жиын болғандықтан оларға жиынға қолданылатын барлық амалдар орындалады. Олар:

- | | |
|---------------------------------|---|
| 1. Бірігу $P_1 \cup P_2$; | $P_1 \cup P_2 = \{(a,b) \mid (a,b) \in P_1 \text{ немесе } (a,b) \in P_2\}$ |
| 2. Қиылысу $P_1 \cap P_2$; | $P_1 \cap P_2 = \{(a,b) \mid (a,b) \in P_1 \text{ және } (a,b) \in P_2\}$ |
| 3. Айырым $P_1 \setminus P_2$; | $P_1 \setminus P_2 = \{(a,b) \mid (a,b) \in P_1 \text{ және } (a,b) \notin P_2\}$ |
| 4. Толықтауыш $\bar{P}$; | $\bar{P} = U \setminus P$, мұндағы $U = M_1 \times M_2$ ($U = M^2$) |
| 5. Кері қатынас P^{-1} ; | $P^{-1} = \{(a, b) \mid (b, a) \in P\}$. |

$$[P] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in P\}$ жиыны P қатынасына кері қатынас деп аталады.

Мысалы, P -жас болу болса, P^{-1} үлкен болу, P -баласы болу болса, P^{-1} әкесі болу. $P(x) = \{y \mid (x, y) \in P \text{ қандай да бір } x \text{ үшін}\}$ X жиынының P -ға қатысты образы (бейнесі) деп, ал $P^{-1}(x)$ – X жиынының P -ға қатысты прообразы деп аталады. Мысалы, $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ жиыны берілсін.



$P = \{(x, y) \mid x, y \in A, y \text{ х-ке бөлінеді және } x \leq 3\}$ бинарлы қатынасына кері қатынас $P^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (6, 2), (8, 2), (3, 3), (6, 3)\}$; X -ң P -ға қатысты образы $P(x) = \{3, 6\}$; X -ң P -ға қатысты прообразы немесе $P^{-1}(x) = \{3\}$. Бинарлы қатынастың көбейтіндісі немесе P_1 мен P_2 композициясы $P_1 \cdot P_2$.

Айталық A, B, C жиындары және P_1, P_2 қатынастары берілсін. $P_1 \subseteq A \times B$ және $P_2 \subseteq B \times C$ бинарлы қатынастарының көбейтіндісі немесе P_1 мен P_2 композициясы бар болады яғни $(a, b) \in P_1 \circ P_2$ егер $(a, z) \in P_1$ және $(z, b) \in P_2$ болатындай $z \in B$ элемент табылса; $P_1 \circ P_2 = \{(a, b) \mid a \in A, b \in C \text{ және } (a, z) \in P_1\}$.

Дербес жағдайда, егер P қатынасы M жиынында анықталған болса $P \subseteq M^2$, онда

$$P \circ P = \{(a, b) \mid (a, c), (c, b) \in P\}$$

Мысалы P - баласы болу болса, онда $P \circ P$ -немересі болу.

Бинарлы қатынастардың қасиеттері

1. A жиынында берілген бинарлы қатынас болсын: $P \subseteq A^2$. Кез-келген $x \in A$ үшін $x P x$ қатынасы бар болса, P қатынасы рефлексивті деп аталады (бір жиын ішіндегі жұптар қатынасы мысалы бір қалада тұру - рефлексивті).

2. Егер $x P x$ қатынасы A жиынның бір де бір элементі үшін орындалмаса P қатынасы антирефлексивті (баласы болу қатынасы - антирефлексивті). Антирефлексивті матрицаның бас диагоналы тек нөлдерден тұрады.

3. Егер кез келген $x, y \in A$ үшін $(x, y) \in P \rightarrow (y, x) \in P$ болса, яғни $P^{-1} = P$ немесе $[P]^T = [P]$ болса, P қатынасы симметриялы деп аталады. Егер $x A$ у болудан $y A$ x болса (бір фирмада жұмыс жасайды), онда A симметриялы.

4. Егер $(x, y) \in P$ және $(y, x) \in P$ болғандығынан $x = y$ болса, яғни $P \cap P^{-1} \subseteq \text{Id}_A$, онда P қатынасы антисимметриялы деп аталады, яғни $x P y$ және $y P x$ қатынастары әртүрлі x пен y -тың ешқандай жұбында бір уақытта орындалмаса (баласы болу, бастық болу - антисимметриялы), онда бұл қатынас антисимметриялы.

5. Егер $(x, y) \in P$ және $(y, z) \in P$ болғандығынан $(x, z) \in P$ болса, (яғни $P \cdot P \subseteq P$) онда P – транзитивті қатынас деп аталады, яғни $x P y$ және $y P z$ болудан $x P z$ болса (жасырақ болу, інісі болу) P - транзитивті болады.

Ескерту: 1. Антисимметрия мен симметрия емес ұғымдары бірдей емес. Мысалы $A = \{1, 2, 3\}$ жиынындағы $P = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ қатынасы симметриялы емес ($(1, 2) \in P$, ал $(2, 1) \notin P$) антисимметриялы да емес, себебі $(2, 3) \in P$, $(3, 2) \in P$ бірақ $2 \neq 3$.

2. Id_A – қатынасы бір уақытта симметриялы да, антисимметриялы да болады.

Бинарлы қатынастар матрицалдарының негізгі қасиеттері.

Егер $P, Q \subseteq A \times B$, $[P] = (p_{ij})$, $[Q] = (q_{ij})$ болса, онда $[P \cup Q] = (p_{ij} + q_{ij})$ және $[P \cap Q] = (p_{ij} * q_{ij})$

мұндағы қосу $[P \cup Q] = [P] + [Q]$, $0 + 0 = 0$, $1 + 1 = 1 + 0 = 0 + 1 = 1$ ережесімен, ал $[P \cap Q]$ көбейту $[P]$ мен $[Q]$ сәйкес элементтерін тура көбейтуден алынады: $[P \cap Q] = [P] * [Q]$

Мысалы, $[P] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $[Q] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ P, Q қатынастарының матрицасы болса, онда

$$[P \cup Q] = [P] \cup [Q] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; [P \cap Q] = [P] * [Q] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Егер $P \subseteq A \times B$, $Q = B \times C$, онда $[P \cdot Q] = [P] \cdot [Q]$; Мұнда $[P]$ және $[Q]$ матрицаларын көбейту матрицаларды көбейтудің әдеттегі ережесімен, ал $[P]$ мен $[Q]$ алынған элементтердің көбейтіндісі мен қосындысы 1 пункттегі ережелермен жүргізіледі.

Мысалы,

$$[P] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; [Q] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \text{ онда } [P \times Q] = \begin{pmatrix} 010 \\ 110 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 01 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}; \quad P^{-1} \quad \text{кері} \quad \text{қатынастың}$$

матрицасы Р қатынасының транспонирленген матрицасы: $[P]^{-1} = [P]^T$

$P \subseteq Q$; $[P] = (p_{ij})$, $[Q] = (q_{ij})$ болса, онда $p_{ij} \leq q_{ij}$

Эквивалентті қатынас

Анықтама. Рефлексивті, симметриялы және транзитивті Р бинарлы қатынасы эквивалентті қатынас немесе жай ғана эквивалентті деп аталады. Эквиваленттілік Е символымен немесе $\sim$ белгісімен белгіленеді. $x \in y$ немесе $x \sim y$.

Мысалы $x=y$ болу қатынасы кез келген А жиынында эквивалентті қатынас. $x=x$ – болғандықтан рефлексивті. $x=y \Rightarrow y=x \rightarrow$ симметриялы. $x=y$, $y=z \Rightarrow x=z$ – транзитивті.

Адамдар жиынында бір қалада тұру эквиваленттік.

7 бөлгендегі бірдей қалдық болу қатынасы эквиваленттік.

$R = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N}, a/7, b/7 \text{ қалдық бірдей}\}$ – жиындағы эквиваленттік.

Бұл қатынас (11,46), (14,170) жұптарына орындалады. ҚазҰПУ студенттер жиынынан бір топқа жату эквиваленттілік – эквивалентті қатынас. Айталық, М жиынында R эквиваленттілігі берілсін (R эквивалентті қатынас берілсін). Белгілі бір тәртіппен М-ң ішкі жиындарын құрайық. Ішкі жиындарды класс деп атайық. C_1 – класы $a_1 \in M$ және оған эквивалентті элементтен құралсын; C_2 – класы $a_2 \in M$ және оған эквивалентті элементтерден құралсын т.с.с. осылай жалғаса берсін. $C_1, C_2, \dots, C_i$ кластар жүйесі құралады. М жиынының кез келген элементтері ең болмағанда бір класқа кіреді, яғни $\bigcup_L C_i = M$.

Бұл кластар жүйесінің мынадай қасиеттері бар:

- Олар бөлімдер құрайды, яғни кластар өзара қиылыспайды;
- Бір кластағы кез келген 2 элемент эквивалентті;
- Әр кластан алынған кез келген 2 элемент эквивалентті емес.

Бұл қасиеттер R қатынасының рефлексивтілік, симметриялық және транзитивтік қасиеттерінен шығады. М жиынынан осылай бөлшектеу, яғни кластар жүйесі R қатысты эквивалентті кластар жүйесі деп аталады. Бұл жүйенің қуаты бөлу индексі деп аталады.

Ретті қатынас

Егер қатынас рефлексивті, антисимметриялы және транзитивті болса, қатаң емес ретті қатынас деп аталады. Егер қатынас антирефлексивті, антисимметриялы және транзитивті, қатаң ретті қатынас деп аталады. Қатынастардың бұл екі түрі ретті қатынастары деп аталады. Мысал $\leq, \geq$ қатынастары қатаң емес, $<, >$ қатынастары қатаң. Бұл екі қатынастар N, R жиындарын реттейді.