

14-ДӘРІС. Біртекті сызықты жүйелер

2.1. Төмендегідей біртекті сызықты теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x \quad (1)$$

Осы жүйенің шешімдерінің кейбір қасиеттерін келтірейік. Ең алдымен ескеретін жәй – біртекті жүйенің бастапқы Коши есебінің $x(t_0) = 0$ шартын қанағаттандыратын нөлдік $x(t) = 0$ шешімі барлық уақытта бар және ол шешім жалғыз.

Теорема-1. Егер $\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)$ – вектор-функциялары (1) жүйенің шешімдері болса, олардың кез келген сызықты комбинациясы да сол жүйенің шешімі болады.

Дәлелдеуі. Берілген функциялардың нақты сандар өрісіндегі сызықты комбинациясын алайық:

$$\varphi(t) = \alpha_1 \varphi^1(t) + \dots + \alpha_n \varphi^n(t) \quad (2)$$

Мұндағы, әрбір $\varphi^i(t)$ функциясы үшін

$$\frac{d\varphi^i(t)}{dt} = P(t)\varphi^i(t), \forall t \in \langle a, b \rangle$$

тепе-теңдігі орындалады.

Осыдан,

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t)}{dt} &= \alpha_1 \frac{d\varphi^1(t)}{dt} + \dots + \alpha_n \frac{d\varphi^n(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \alpha_i P(t) \varphi^i(t) = \\ &= P(t) \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi^i(t) = P(t) \varphi(t), \forall t \in \langle a, b \rangle \end{aligned}$$

Теорема-2. Егер (1) жүйенің комплексты $\varphi(t) = u(t) + iv(t)$ шешімі бар болса, онда оның нақты және жорамал бөліктері өз алдарына (1) жүйенің шешімін береді.

Дәлелдеуі. Шарт бойынша

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} + i \frac{dv(t)}{dt} = P(t)(u(t) + iv(t)) = P(t)u(t) + iP(t)v(t)$$

Осыдан,

$$\frac{du(t)}{dt} = P(t)u(t), \frac{dv(t)}{dt} = P(t)v(t), \forall t \in \langle a, b \rangle \quad (3)$$

Анықтама-1. Егер $\langle a, b \rangle$ аралығында анықталған $\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)$ функциялары үшін бәрі бірдей нөлге тең емес $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ сандары табылып,

$$\alpha_1 \varphi^1(t) + \dots + \alpha_n \varphi^n(t) = 0, \forall t \in \langle a, b \rangle \quad (4)$$

теңдігі орындалса, онда берілген функциялар жиыны $\langle a, b \rangle$ аралығында сызықты тәуелді деп аталынады, ал (4) теңдік $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ сандарының тек нөлдік мәндерінде ғана орындалса, онда берілген функциялар жиыны $\langle a, b \rangle$ аралығында сызықты тәуелсіз деп аталады.

Ескерту. Егер берілген функциялар жиыны $\langle a, b \rangle$ аралығында сызықты тәуелді болса, онда сол аралыққа жататын кез келген $t_0 \in \langle a, b \rangle$ нүктесінде де тәуелді болады. Кері ұйғарым орындалмайды, өйткені бұл жағдайда $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ сандары t_0 -ға тәуелді болады. Ал егер берілген функциялар жиыны белгілі бір дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдері болса, онда бір нүктедегі тәуелділік пен тәуелсіздік сәйкес аралықтағы тәуелділік пен тәуелсіздікке эквивалент.

Анықтама-2. Біртекті сызықты жүйенің $\langle a, b \rangle$ аралығында анықталған n сызықты тәуелсіз шешімдер жиынын сол жүйенің осы аралықтағы базисі немесе фундаменталь шешімдер жүйесі деп атайды.

2.2. Айталық, $\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)$ вектор-функциялары (1) жүйенің шешімдері болсын. Әрбір бағанасы осы векторлардың координаттарынан тұратын төмендегідей матрица құрайық:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Осы матрицаның анықтауышын Вронский анықтауышы немесе вронскиан деп атайды және оны $W(t)$ - деп белгілейді. Сонымен,

$$W(t) = W[\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)] = \det \Phi(t) \quad (6)$$

Егер (5) матрицаның анықтауышы нөлге тең болмаса, онда ол матрица фундаменталь матрица деп аталынады.

Теорема-3. Егер $\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)$ функциялары $\langle a, b \rangle$ аралығында сызықты тәуелді болса, онда осы аралықта олардың вронскианы нөлге тең болады.

Дәлелдеуі. Анықтама бойынша

$$\alpha_1 \varphi^1(t) + \dots + \alpha_n \varphi^n(t) = 0 \quad (7)$$

мұнда $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ сандарының бәрі бірдей нөл емес. Соңғы қатынасты координаттар бойынша ашып жазсақ, төмендегідей біртекті сызықты жүйе аламыз:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \varphi_{11}(t) + \dots + \alpha_n \varphi_{1n}(t) &= 0 \\ \dots &\dots \dots \\ \alpha_1 \varphi_{n1}(t) + \dots + \alpha_n \varphi_{nn}(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Бұл жүйенің нөлдік емес шешімі бар болу үшін оның анықтауышы нөлге тең болуы шарт, яғни $W(t) = 0, \forall t \in \langle a, b \rangle$.

$$\varphi^1(t_0) = a^1, \dots, \varphi^n(t_0) = a^n \quad (14)$$

$$x(t) = K(t, t_0)x^0 \quad (22)$$

Осындағы $K(t, t_0)$ матрицасын Коши матрицасы деп атайды.

Егер соңғы қатынастағы t_0 -ді тұрақталған сан, ал x^0 -ді тұрақталмаған вектор деп есептесек, онда (22) қатынасты жүйенің Коши түріндегі жалпы шешімі деп атайды.

Егер кейбір $t_0 \in \langle a, b \rangle$ нүктесінде $\Phi(t_0) = E$ теңдігі орындалса, онда $\Phi(t)$ матрицасы t_0 нүктесінде қалыпталған (нормаланған) деп аталады. Бұл жағдайда шешім

$$x(t) = \Phi(t)x^0 \quad (23)$$

түрінде жазылады.

Теорема-6. Егер $\Phi(t)$ фундаменталь матрица болса, онда $\Psi(t) = \Phi(t)C$ матрицасы да фундаменталь матрица болады. Мұнда C - тұрақты $(n \times n)$ - өлшемді ерекше емес матрица.

Шынында да,

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{d(\Phi C)}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} C$$

Ал $\Phi(t)$ матрицасы (18) матрицалық теңдеуді қанағаттандыратындықтан,

$$\frac{d(\Phi C)}{dt} = (P\Phi)C = P(\Phi C)$$

тепе-теңдігін аламыз, яғни $\Psi(t) = \Phi(t)C$ матрицасы да (18) матрицалық теңдеуді қанағаттандырады. Оның үстіне

$$\det \Psi(t) = \det \Phi(t) \cdot \det C \neq 0$$

2.4. Лиувилль формуласын келтірейік.

Алдымен, n -ші ретті анықтауыштың туындысы қалай ашылатынын көрсетейік.

n -ші ретті анықтауыштың туындысы сол анықтауыштың әр бағанасы (немесе әр жатық жолы) кезекпен туындыларымен ауыстырылған n анықтауыштардың қосындысынан тұрады. Осы ереже бойынша вронскианның туындысын ашайық:

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \dots & \dot{\Phi}_{1i} & \dots & \Phi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{j1} & \dots & \dot{\Phi}_{ji} & \dots & \Phi_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{n1} & \dots & \dot{\Phi}_{ni} & \dots & \Phi_{nn} \end{vmatrix} \quad (24)$$

Мұндағы, φ_{ji} берілген жүйенің шешімі болғандықтан,

$$\dot{\varphi}_{ji}(t) = \sum_{k=1}^n p_{jk}(t)\varphi_{ki}(t), (i, j = 1, \dots, n)$$

Осы өрнектерді анықтауыштың i -нші бағанасына қойсақ, анықтауыштың қасиеттері бойынша, $k = j$ болатын қосындыдан басқа анықтауыштардың бәрі нөлге тең болады, өйткені олардың екі бағанасы өзара пропорционал болады. Сондықтан,

$$\dot{W}(t) = \sum_{j=1}^n p_{jj}(t)W(t)$$

Осыдан

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr} P(t) dt} \quad (25)$$

Мұндағы, $\text{tr} P(t) = \sum_{j=1}^n p_{jj}(t)$ - берілген $P(t)$ матрицасының ізі деп аталады.

Осы (25) теңдікті Лиувилль формуласы деп атайды. Бұл формуладан мынандай қорытынды шығады: егер $\langle a, b \rangle$ аралығының бір нүктесінде вронскиан нөлге тең болса, ол бүкіл аралықта нөлге тең болады, ал $\langle a, b \rangle$ аралығының бір нүктесінде нөлге тең болмаса, онда ол бүкіл аралықта нөлге тең болмайды.

2.5. Айталық, $\Phi(t)$ - фундаменталь матрица болсын.

$\Phi^{-1}(t)\Phi(t) = E$ тепе-теңдігін дифференциалдайық:

$$\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}\Phi) = \frac{d\Phi^{-1}}{dt}\Phi + \Phi^{-1}\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

Осыдан

$$\frac{d\Phi^{-1}}{dt} = -\Phi^{-1}\frac{d\Phi}{dt}\Phi^{-1} = -\Phi^{-1}P\Phi\Phi^{-1} = -\Phi^{-1}P$$

немесе

$$\frac{d\Phi^{-1}}{dt} = -\Phi^{-1}P$$

Соңғы қатынастағы матрицаларды аударсақ,

$$\frac{d(\Phi^{-1})^T}{dt} = -P^T(\Phi^{-1})^T$$

теңдігін аламыз. Бұдан шығатын қорытынды, $\Psi(t) = (\Phi^{-1})^T$ матрицасы

$$\frac{dy}{dt} = -P(t)y \quad (27)$$

теңдеуінің фундаменталь матрицасы болатынын көреміз. Осы (27) жүйені берілген (1) жүйенің түйіндесі деп атайды. Егер $\Psi_1(t)$ осы жүйенің кейбір фундаменталь матрицасы болса, онда

$$\Psi_1(t) = (\Phi^{-1})^T C$$

қатынасы орын алады. Мұнда C -ерекше емес матрица. Осыдан

$$\Psi_1^T(t) = C^T \Phi^{-1}$$

немесе

$$\Psi_1^T(t)\Phi(t) = C^T = B$$

Соңғы теңдіктен мынаны көреміз: $\Psi_1^T(t)$ - матрицасының жатық жолы (27) жүйенің шешімдері болатынын, $\Phi(t)$ матрицасының бағаналары (1) жүйенің шешімдері болатыны, ал олардың көбейтіндісі тұрақты екенін көреміз.