

13-ДӘРІС. Тұрақты коэффициентті сызықты біртектісін теңдеулерді интегралдау.

Енді тұрақты коэффициентті біртектісін теңдеуді қарастырайық:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (16)$$

Мұнда a_i -сандары нақты, ал $f(x)$ - функциясы кейбір $\langle a, b \rangle$ аралығында үздіксіз деп алынады.

Өткен параграфта көрсетілгендей, біртектісін теңдеудің жалпы және дербес шешімдерін жалпы жағдайда тұрақтыларды вариациялау арқылы анықтауға болады. Кейбір жағдайларда $f(x)$ функциясының түріне байланысты шешімді алгебралық амалдардың көмегімен интегралсыз-ақ табуға болады.

Айталық, $f(x)$ функциясы квазикөпмүшелік түрде берілсін, яғни

$$f(x) = P_m(x) e^{\alpha x} \quad (17)$$

Мұнда $P_m(x)$ -дәрежесі m -ге тең көпмүшелік:

$$P_m(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_m \quad (18)$$

Сонымен,

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = P_m(x) e^{\alpha x} \quad (19)$$

Дербес шешімді құрудың екі жағдайы қарастырылады.

1⁰. α -саны сипаттаушы теңдеудің түбірі емес. Бұл жағдайда дербес шешім мына түрде ізделінеді:

$$y_1 = Q_m(x) e^{\alpha x} \quad (20)$$

Мұнда

$$Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_m \quad (21)$$

Осы (20) өрнекті (19) теңдеуге қойып, алдын ала $e^{\alpha x}$ функциясына қысқартып, x -тың әртүрлі дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіретін болсақ, $q_0, q_1, \dots, q_m$ - коэффициенттері төмендегідей теңдеулерден бірімді түрде анықталады:

$$\left. \begin{aligned} q_0 P(\alpha) &= p_0, \\ q_0 C_m^1 P'(\alpha) + q_1 P(\alpha) &= p_1, \\ \dots\dots\dots \\ q_0 C_m^m P^{(m)}(\alpha) + \dots + q_{m-1} P'(\alpha) + q_m P(\alpha) &= p_m \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Мұнда $P(\alpha) \neq 0$, өйткені α -саны сипаттаушы теңдеудің түбірі емес.

2⁰. α -саны сипаттаушы теңдеудің k -еселікті түбірі болсын, яғни

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0, P^{(k)}(\alpha) \neq 0 \quad (23)$$

Бұл жағдайда дербес шешім

$$y_1 = x^k Q_m(x) e^{\alpha x} \quad (24)$$

түрінде ізделінеді. Мұнда да (24) өрнекті (19) теңдеуге қоятын болсақ, $q_0, q_1, \dots, q_m$ - сандарын табу үшін төмендегідей алгебралық теңдеулер аламыз:

$$\left. \begin{aligned} q_0 C_{k+m}^k P^{(k)}(\alpha) &= p_0, \\ q_0 C_{k+m}^{k+1} P^{(k+1)}(\alpha) + q_1 C_{k+m-1}^k P^{(k)}(\alpha) &= p_1, \\ \dots\dots\dots \\ q_0 C_{k+m}^{k+m} P^{(k+m)}(\alpha) + \dots + q_m C_k^k P^{(k)}(\alpha) &= p_m \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Мұнда $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$ болғандықтан, барлық коэффициенттер бір мәнді түрде анықталады.

Ескерту. Егер (16) теңдеудің оң жағы тригонометриялық квазиполином түрінде берілсе, яғни

$$f(x) = P_m^{(1)}(x) e^{\alpha x} \cos bx + P_m^{(2)}(x) e^{\alpha x} \sin bx$$

түрінде берілсе, онда $\cos bx$ және $\sin bx$ функцияларын Эйлер формуласы бойынша

түрінде жазып, алдыңғы жағдайға келтіруге болады.

Мысалдар.

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек болсын. Ол үшін сипаттаушы теңдеу құрамыз: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Бұл теңдеудің түбірлері: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Сәйкес дербес шешімдер: $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$.

Жалпы шешім: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

2. $y'' - 4y' + 5y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек болсын. Ол үшін сипаттаушы теңдеу құрамыз: $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$. Бұл теңдеудің түбірлері: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Дербес шешімдер: $y_1 = e^{2x} \cos x$, $y_2 = e^{2x} \sin x$.

Жалпы шешім: $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

3. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$. Сипаттаушы теңдеу құрамыз: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ немесе $(\lambda - 1)^3 = 0$. Осыдан $\lambda_{1,2,3} = 1$. Жалпы шешім: $y = e^x (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$.

4. $y'' - 9y = 5e^{2x}$. Сипаттаушы теңдеу: $\lambda^2 - 9 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 3$. Біртекті теңдеудің жалпы шешімі: $y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$. Біртектісіздің дербес шешімін: $\tilde{y} = Ae^{2x}$ түрінде іздейміз. Осыдан $A = -1$ болатынын көреміз. Сондықтан, біртектісіз берілген теңдеудің жалпы шешімі

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - e^{2x}$$

функциясы болады.

9-ЛЕКЦИЯ. Біртекті сызықты жүйелер.

Лекция мақсаты: Сызықты жүйелердің жалпы қасиеттерімен таныстыру. Біртекті жүйенің шешімдерінің қасиеттерімен таныстыру.

Негізгі сөздер: вектор, матрица, фундаменталь матрица, Лиувилль формуласы, Коши функциясы.

Қысқаша мазмұны

Сызықты жүйелердің жалпы қасиеттері

1.1. Қарапайым теңдеулер жүйелердің ең маңызды дербес түрі – сызықты жүйелер болып есептелінеді. Оның скалярлық түрдегі жазылуы төмендегідей болады:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{dx_1}{dt} = p_{11}(t)x_1 + \dots + p_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ & \\ & \frac{dx_n}{dt} = p_{n1}(t)x_1 + \dots + p_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Мұндағы, $p_{ij}(t)$ және $f_i(t)$ функциялары кейбір $\langle a, b \rangle$ аралығында анықталған нақты үздіксіз функциялар деп қарастырылады. Бұл жүйені былайша жазуға да болады:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n p_{ij}(t)x_j + f_i(t), (i=1, \dots, n) \quad (2)$$

Егер $P(t) = (p_{ij}(t))$ ($i=1, \dots, n$) матрицасын енгізсек, ал x пен f -ты вектор немесе бір бағаналы матрицалар деп қарастырсақ, онда берілген жүйені төмендегідей векторлы-матрицалық түрде жазуға болады:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + f(t) \quad (3)$$

Бұл қатынасты жүйе деумен қатар (оның векторлық мағынасын ескеріп), бір теңдеу деп те айтуға болады.

Әдетте, $f(t)$ – вектор-функцияны бос мүше деп атайды. Егер осы бос мүше нөлге тең болса, онда (3) жүйенің орнына оның біртектісін аламыз:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x \quad (4)$$

Бос мүше нөлге тең болмағанда (3) жүйені (4) жүйенің сәйкес біртектісі деп атайды.

Бұл жүйелер үшін Коши есебі мына түрде қойылады: барлық векторлардың ішінен

$$\varphi(t_0) = x^0, t_0 \in \langle a, b \rangle$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын шешімді табу керек. Мұндағы, x^0 – берілген бастапқы вектор.

1.2. Сызықты жүйелердің жалпы қасиеттерін келтірейік:

1⁰. Тәуелсіз айнымалыны үздіксіз дифференциалданатын функция арқылы басқа бір тәуелсіз айнымалымен алмастырғаннан жүйенің сызықтығы өзгермейді.

Шынында да, $t = \varphi(\tau), \varphi'(\tau) \neq 0, \forall \tau \in \langle c, d \rangle$ алмастыруын жасайық. Туындыны жаңа айнымалы арқылы өрнектейік:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{1}{\varphi'(\tau)}$$

Осыдан,

$$\frac{1}{\varphi'(\tau)} \cdot \frac{dx}{d\tau} = P[\varphi(\tau)]x + f[\varphi(\tau)]$$

немесе

$$\frac{dx}{d\tau} = P[\varphi(\tau)]\varphi'(\tau)x + f[\varphi(\tau)]\varphi'(\tau)$$

яғни,

$$\frac{dx}{d\tau} = \bar{P}(\tau)x + \bar{f}(\tau) \quad (5)$$

түріндегі жаңа сызықты жүйеге қайта келдік.

2⁰. Белгісіз функцияны сызықты түрлендіргеннен жүйенің сызықтығы өзгермейді.

Шынында да, айталық $x = \alpha(t)y + \beta(t)$ түрінде алмастыру

жасалсын. Мұнда $\alpha(t) = (\alpha_{ij}), (i, j = 1, \dots, n)$ ерекше емес матрица, яғни оның анықтауышы нөлге тең емес. Осы қатынастан туынды алып берілген жүйенің өзін пайдалансақ, мынандай қатынастар аламыз:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{dy}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} y + \frac{d\beta}{dt}$$

яғни,

$$P(t)[\alpha y + \beta] + f = \alpha \frac{dy}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} y + \frac{d\beta}{dt}$$

Осыдан,

$$\frac{dy}{dt} = \alpha^{-1} \left[P(t)\alpha - \frac{d\alpha}{dt} \right] y + \alpha^{-1} \left[P(t)\beta + f(t) - \frac{d\beta}{dt} \right]$$

немесе

$$\frac{dy}{dt} = \bar{P}(t)y + \bar{f}(t)$$

Мұндағы,

$$\bar{P}(t) = \alpha^{-1} \left[P(t)\alpha - \frac{d\alpha}{dt} \right],$$

$$\bar{f}(t) = \alpha^{-1} \left[P(t)\beta + f(t) - \frac{d\beta}{dt} \right]$$