

8-ДӘРІС. Реті төмендетілетін теңдеулер

2.1. Жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулерді айқындалмаған

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

теңдеу түрінде, немесе, жоғарғы туындысы бойынша шешілген

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

теңдеу түрінде жазуға болатыны айтылған.

Енді осы теңдеулердің ретін қандай жағдайларда төмендетіп, интегралдауды оңайлатуға болатынын көрсетейік.

1⁰. Тәуелсіз айнымалы айқын түрде кірмеген теңдеу:

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (3)$$

Бұл жағдайда тәуелсіз айнымалы үшін y -ты аламыз да, $y' = z(y)$ түрінде жаңа белгісіз енгіземіз.

Сонда

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \frac{dy}{dx} = z \frac{dz}{dy} \\ y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy} \left(z \frac{dz}{dy} \right) z = z \left(z \frac{d^2 z}{dy^2} + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right) \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n)} &= \omega \left(z, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} \right) \end{aligned}$$

Бұдан

$$F(y, z, z z', \dots, \omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0$$

түріндегі теңдеу аламыз. Бұл $(n-1)$ -ретті теңдеу. Егер осы теңдеуді интегралдау мүмкін болса, онда оның жалпы интегралы

$$\Phi(y, z, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0$$

немесе

$$\Phi(y, y', C_1, \dots, C_{n-1}) = 0$$

түрінде болады. Соңғы қатынас бірінші ретті теңдеу. Сондықтан, оның аралық интегралы берілген (3) теңдеудің жалпы интегралы болады.

2⁰. Белгісіз функция мен оның алғашқы туындылары кірмейтін теңдеу:

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (4)$$

Бұл жағдайда $y^{(k)} = z$ белгілеуін енгізсек,

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0 \quad (5)$$

түріндегі $(n-k)$ - ретті теңдеу аламыз. Демек, (4) теңдеудің реті k - бірлікке төмендеді. Егер соңғы теңдеудің

$$\Phi(x, z, C_1, \dots, C_{n-k}) = 0$$

түріндегі аралық интегралы белгілі болса, онда берілген теңдеудің жалпы интегралы

$$y^{(k)} = f(x, C_1, \dots, C_{n-k}) \quad (6)$$

теңдеуді интегралдау арқылы табылады.

3⁰. Белгісіз функция мен оның туындылары бойынша біртекті теңдеу.

Егер (1) теңдеудегі F функциясы үшін

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

шарты орындалса, онда ол функция m дәрежелі біртекті функция деп аталынады да, сәйкес теңдеу функция мен оның туындылары бойынша біртекті деп аталынады. Бұл жағдайда $y' = ty$ алмастыруы арқылы теңдеудің реті бір ретке төмендетіледі. Шынында да,

$$\begin{aligned} y'' &= y't + yt' = y(t^2 + t'), \\ y''' &= y'(t^2 + t') + y(2tt' + t'') = y(t^3 + 3tt' + t'') \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n)} &= y\omega(t, t', \dots, t^{(n-1)}) \end{aligned}$$

Бұл өрнектерді (1) теңдеуге қойсақ,

$$F(x, t, t' + t^2, \dots, \omega(t, t', \dots, t^{(n-1)})) = 0$$

түріндегі $(n-1)$ -ретті теңдеу аламыз. Егер бұл теңдеудің

$$t = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1})$$

түріндегі жалпы шешімін таба алсақ, онда берілген теңдеудің жалпы шешімі

$$y' = y\varphi(x, C_1, \dots, C_{n-1})$$

тендеуін интегралдаудан алынады.

4⁰. Теңдеудің сол жағы басқа бір функцияның туындысы болса, онда теңдеудің реті бір ретке төмендейді. Шынында да,

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = 0$$

болғандықтан, бір аралық интеграл белгілі:

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = C_1,$$

яғни бастапқы теңдеудің реті бір өлшемге кеміді.

5⁰. Жалпыланған біртекті теңдеу, яғни F функциясы үшін

$$F(tx, t^k y, t^{k-1} y', \dots, t^{k-n} y^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

шарты орындалатын теңдеу. Бұл жағдайда $x = e^t, y = ze^t$ алмастыруы арқылы теңдеудің ретін бірге кемітуге болады.