

3-ДӘРІС. Біртекті теңдеулер. Бірінші ретті сызықты теңдеулер.

Лекция мақсаты: Біртекті сызықты теңдеулер мен біртексіз сызықты теңдеулерді интегралдау әдісімен таныстыру. Толық дифференциалды теңдеуді интегралдау.

Негізгі сөздер: Біртектілік, біртексіздік, Эйлер әдісі, вариациялау, интегралдық көбейткіш.

Қысқаша мазмұны

Бірінші ретті сызықты теңдеулер

3.1. Белгісіз функция мен оның туындысы сызықты түрде, яғни бірінші дәрежеде байланысқан теңдеуді сызықты дифференциалдық теңдеу деп атайды. Сызықты теңдеудің келтірілген түрін қарастырайық:

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (1)$$

Мұнда $p(x)$, $q(x)$ функциялары кейбір $<a, b>$ аралығында анықталған және үздіксіз деп есептелінеді. Егер $q(x) \neq 0$ болса, онда (1) теңдеуді біртексіз сызықты теңдеу деп, ал $q(x) = 0$ болса, онда біртекті сызықты теңдеу деп атайды:

$$y' + p(x)y = 0 \quad (2)$$

Көбінесе (2) теңдеуді (1) теңдеудің сәйкес біртектісі деп атайды.

Біртекті (2) теңдеу айнымалылары ажыратылатын теңдеу. Екі жағын y -ке бөліп, мынандай теңдеу аламыз:

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0$$

Осы қатынасты интегралдасақ:

$$\ln|y| + \int p(x)dx = \ln C$$

өрнегін аламыз. Логарифмсіз жазсақ,

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \quad (3)$$

түріндегі (2) теңдеудің жалпы шешімін аламыз. Егер $y=0$ жағдайды қарастырсақ, ол осы жалпы шешімнің $C=0$ болғандағы мәніне сәйкес келетін шешім. Сондықтан $y=0$ – дербес шешім. Оны нөлдік немесе тривиал шешім деп те атайды және ол барлық уақытта бар шешім.

Біртекті (2) теңдеудің (3) жалпы шешімін Коши түрінде жазсақ, былай жазылады:

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(x)dx} \quad (4)$$

мұнда x_0 – тұрақты сан, ал y_0 – кез келген сан деп есептелінеді.

Біртекті теңдеу шешімдерінің екі қасиетін атап өтейік:

1^0 . Егер y_1 және y_2 функциялары (2) теңдеудің шешімдері болса, онда олардың қосындысы: $y=y_1+y_2$ функциясы да сол теңдеудің шешімі болады.

2⁰. Егер y_1 функциясы (2) теңдеудің шешімі болса, онда $y = Cy_1$ функциясы да (C – кез келген сан) сол теңдеудің шешімі болады.

3.2. Енді берілген біртектісіз (1) теңдеуге оралатын болсақ, оның жалпы шешімін табу үшін мынандай әдістерді қолдануға болады.

1⁰. Тұрақты санды вариациялау әдісі (Лагранж әдісі).

Біртектісіз (1) теңдеудің жалпы шешімін біртекті (2) теңдеудің жалпы шешімі – (3) түрде іздейміз, бірақ мұндағы C санын x -қа байланысты айнымалы функция деп есептейміз:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \quad (5)$$

Осы функцияны (1) теңдеуге апарып қоялық:

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Бұдан

$$\frac{dC}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

теңдеуін аламыз. Енді осы теңдеуді интегралдасақ, онда

$$C(x) = C_0 + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \quad (6)$$

өрнегін аламыз. Мұнда C_0 – кез келген тұрақты сан. Осы (6) өрнекті (5) қатынасқа апарып қойсақ, онда біртектісіз (1) теңдеудің жалпы шешімін аламыз:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[C_0 + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \right] \quad (7)$$

Соңғы шешімді Коши түрінде жазсақ, онда мынандай өрнек аламыз:

$$y = e^{-\int_{x_0}^x p(x)dx} \left[y_0 + \int_{x_0}^x q(x)e^{\int_{x_0}^x p(x)dx}dx \right] \quad (8)$$

мұнда x_0 -тұрақты сан, ал y_0 – кез келген сан деп есептейміз.

2⁰. Бернуллі әдісі.

Біртектісіз (1) теңдеудің шешімін $y = u(x)v(x)$ түрінде іздейміз. Сонда

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + p(x)uv = q(x) \quad (9)$$

Мұндағы, $u(x)$ функциясын біртекті $\frac{du}{dx} + p(x)u = 0$ теңдеудің шешімі $u = e^{-\int p(x)dx}$ түрінде алсақ, онда (9) қатынастан

$$e^{-\int p(x)dx} \frac{dv}{dx} = q(x)$$

теңдеуін аламыз. Осыдан интегралдау арқылы

$$v = C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \quad (10)$$

болатынын көреміз. Мұнда C – тұрақты сан. Табылған $u(x)$ және $v(x)$ функцияларының көбейтіндісі $y(x)$ функциясын беретін болғандықтан,

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left[C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right],$$

яғни жалпы шешім (7) түрге келеміз.

3⁰. Интегралдаушы көбейткіш әдісі (Эйлер әдісі).

Берілген біртекті (1) теңдеудің екі жағын $e^{\int p(x) dx}$ функциясына көбейтіп, ықшамдап жазатын болсақ, онда мынандай қатынас аламыз:

$$\frac{d}{dx} (y e^{\int p(x) dx}) = q(x) e^{\int p(x) dx}.$$

Осы қатынасты интегралдасақ:

$$y e^{\int p(x) dx} = \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C,$$

ал бұдан

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left[C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right].$$

Тағы да жалпы шешім – (7) түрге келдік.

Жалпы, белгілі бір теңдеудің шешімін іздегенде жоғарыда келтірілген әдістердің есептеу жолын қайталамай-ақ, дайын (7) өрнекті пайдалану керек.

3.3. Енді сызықты теңдеуге келтірілетін теңдеулерді қарастырайық.

Мына түрдегі теңдеуді

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad (11)$$

Бернулли теңдеуі деп атайды. Егер $n=0$, не $n=1$ болса, онда бұл теңдеу сызықты теңдеуге айналады. Сондықтан, $n \neq 0, 1$ - жағдайды қарастырамыз. Бұл жағдайда

$$z = y^{1-n}$$

алмастыруын енгізсек, мынандай теңдеу аламыз:

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x) \quad (12)$$

Бұл сызықтық біртекті теңдеу. Оның жалпы шешіміндегі z -тың орнына y^{1-n} -ты қойсақ, Бернулли теңдеуінің жалпы шешімі алынады:

$$y = \left[e^{(n-1)\int p(x) dx} \left(C + (1-n)\int q(x) e^{(1-n)\int p(x) dx} dx \right) \right]^{\frac{1}{1-n}} \quad (13)$$

Бернулли теңдеуіне кей жағдайларда келтірілетін теңдеудің біреуі Рикатти теңдеуі:

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + z(x) \quad (14)$$

Бұл теңдеу жалпы жағдайда тұйық түрде интегралданбайды, бірақ оның бір дербес шешімі белгілі болса, онда ол Бернулли теңдеуіне келтіріледі. Айталық, $y = \varphi(x)$ (14) теңдеудің белгілі бір аралықтағы шешімі болсын. Рикатти теңдеуіне $z = y - \varphi(x)$ алмастыруын енгізсек, онда

$$z' - [2p(x)\varphi(x) + q(x)]z = p(x)z^2 \quad (15)$$

түріндегі Бернулли теңдеуін аламыз. Ал бұл теңдеуді өз кезегінде сызықты теңдеуге келетінін жоғарыда көрсеткенбіз.