

2-ДӘРІС. Айнымалылары ажыратылатын теңдеулер

2.1. Берілген теңдеудің шешімін сол теңдеуге кіретін функциялар және олардың интегралы түрінде өрнектеуді теңдеуді квадратура арқылы интегралдау деп атайды. Бұл параграфта кейбір оңай интегралданатын теңдеулердің түрлерін келтірейік.

1⁰. Теңдеудің оң жағы белгісіз функцияға тәуелсіз:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (1)$$

Мұнда $f(x)$ функциясы берілген, (a, b) аралығында үздіксіз деп есептеледі. Бұл теңдеудің жалпы шешімін табу үшін одан анықталмаған интеграл алсақ жеткілікті:

$$y = \int f(x) dx + C \quad (2)$$

Бұл өрнек Коши түрінде былай жазылады:

$$y = \int_{x_0}^x f(x) dx + y_0 \quad (3)$$

Мұнда x_0 – берілген сан деп, y_0 – кез келген сан деп есептеледі.

2⁰. Теңдеудің оң жағы белгісіз функцияға ғана тәуелді:

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \quad (4)$$

Мұнда $f(y)$ функциясы кейбір (c, d) аралығында үздіксіз деп есептеледі және осы аралықта нөлге айналмасын. Онда бұл теңдеуді аударып жазуға болады:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \quad (5)$$

Соңғы теңдеудің жалпы шешімін табу үшін оның екі жағын dy -ке көбейтіп, анықталмаған интеграл алсақ жеткілікті:

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C \quad (6)$$

немесе Коши түрінде:

$$x = \int_{y_0}^y \frac{dy}{f(y)} + x_0 \quad (7)$$

Мұнда y_0 – тұрақты сан деп, ал x_0 – кез келген сан деп есептеледі.

3⁰. Жоғарыда келтірілген теңдеулер айнымалылары ажырайтын теңдеулер қатарына жатады. Мұндай теңдеулердің жалпы түрі былай жазылады:

$$f_1(x)f_2(y)dx + f_3(x)f_4(y)dy = 0 \quad (8)$$

Осы теңдеуде $f_2(y)$ және $f_3(x)$ функциялары берілген облыста нөлге тең болмаса, онда теңдеудің екі жағын $f_2(y)f_3(x)$ көбейтіндісіне бөлсек, мынандай қатынас аламыз:

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)} dx + \frac{f_4(y)}{f_2(y)} dy = 0 \quad (9)$$

Бұл келтіру айнымалыларды ажырату тәсілі деп аталады. Жалпы, айнымалыларды ажырату деп dx -тың алдында тек x -қа тәуелді, ал dy -тың алдында тек y -ке тәуелді функциялардың тұруын қамтамасыз етуді айтады.

Соңғы теңдеудің жалпы шешімін табу үшін екі жағынан анықталмаған интеграл алсақ жеткілікті:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_3(x)} dx + \int \frac{f_4(y)}{f_2(y)} dy = C \quad (10)$$

немесе Коши түрінде:

$$\int_{x_0}^x \frac{f_1(x)}{f_3(x)} dx + \int_{y_0}^y \frac{f_4(y)}{f_2(y)} dy = 0 \quad (11)$$

4⁰. Айнымалылары ажырайтын теңдеулер қатарына басқа да теңдеулерді жатқызуға болады. Олар кейбір алмастырулар арқылы оңай интегралданады. Солардың бірі:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by) \quad (12)$$

түріндегі теңдеулердің $z = ax + by$ алмастыруы арқылы айнымалылары оңай бөлінеді. Шынында да, соңғы алмастырудан туынды тауып, теңдеуге қоятын болсақ, мынандай қатынастар аламыз:

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}$$

немесе

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z)$$

Соңғы қатынастан:

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx,$$

яғни айнымалылар бөлінді. Осыдан интеграл алсақ, онда жалпы интегралды мына түрде жазуға болады:

$$x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + C \quad (13)$$

5⁰. Екінші бір келетін теңдеулер түрі – біртекті теңдеулер. Әдетте, біртекті теңдеу деп берілген теңдеудің оң жағындағы $f(x, y)$ функциясы кез келген s саны үшін

$$f(sx, sy) = s^m f(x, y) \quad (14)$$

теңдігін қанағаттандыратын жағдайды айтады. Мұнда m -саны біртектіліктің дәрежесі деп аталады.

Егер $s = \frac{1}{x}$ деп алсақ, онда $f(sx, sy) = f(1, \frac{y}{x}) = \varphi(\frac{y}{x})$ болады да, теңдеуді былай жазуға болады:

$$\frac{dy}{dx} = f(1, \frac{y}{x}) = \varphi(\frac{y}{x}) \quad (15)$$

Мұндай теңдеулердің $z = \frac{y}{x}$ алмастыруы арқылы айнымалыларын бөлуге болады:

$$y = zx, \frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$$

Осыдан

$$x \frac{dz}{dx} = \varphi(z) - z$$

теңдеуін аламыз. Егер $\varphi(z) - z \neq 0$, онда

$$\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

Бұдан интегралдау арқылы

$$\int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \ln|x| + \ln C$$

өрнегін аламыз. Логарифмсіз жазатын болсақ, онда

$$Cx = e^{\int \frac{dz}{\varphi(z) - z}} \quad (16)$$

түріндегі қатынасты аламыз. Соңғы интегралдың алғашқы функциясы айқындалса, ондағы z –тың орнына $\frac{y}{x}$ өрнегі қойылуы керек.

6⁰. Мына түрдегі теңдеулер

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad (17)$$

біртекті теңдеуге келтірілетін теңдеулер деп есептелінеді. Мұнда алдымен c_1 және c_2 сандарынан құтылуға болады. Ол үшін екі түзудің

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

қиылысу нүктелерін тауып, координат жүйесінің бас нүктесін сол нүктеге көшіру керек. Айталық, (α, β) осы екі түзудің қиылысу нүктесі болсын. Бұл жағдайда

$$u = y - \beta, v = x - \alpha$$

алмастыруларын енгізсек, онда берілген теңдеу біртекті теңдеуге келеді:

$$\frac{du}{dv} = f\left(\frac{a_1v + b_1u}{a_2v + b_2u}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{u}{v}}{a_2 + b_2\frac{u}{v}}\right) = \varphi\left(\frac{u}{v}\right) \quad (18)$$

Бұл теңдеу алдындағы теңдеу сияқты, $u = tv$ алмастыруы арқылы оңай интегралданады. Егер жоғарыда көрсетілген екі түзу қиылыспаса, онда $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ қатынасы орындалады да, бұл жағдайда $z = a_1x + b_1y$ алмастыруы арқылы теңдеудің айнымалылары оңай бөлінеді.