

12-ДӘРІС. КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫ ИНТЕГРАЛДАУ

Комплекс облысында L контуры бойынша үзіліссіз $f(z)$ функциясының қисық сызықты интегралы интегралдық қосындының шегі арқылы анықталады

$$\int_L f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k. \quad (1)$$

Егер

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

болса, онда (1) мына түрде жазуға болады

$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i \int_L vdx + udy. \quad (2)$$

Кошидің интегралдық теоремасы. Егер бірбайланысты G облысында $f(z)$ аналитикалық функция болса, онда осы облыста жатқан кез келген L тұйық контур бойынша алынған интеграл нөлге тең, яғни

$$\oint_L f(z)dz = 0. \quad (3)$$

(3) формула көпбайланысты облыс үшін де орынды.

Кошидің интегралдық формуласы. Егер $f(z)$ контуры тұйық L мен шектелген G облысында бірімәнді аналитикалық функция болса, онда кез келген $z_0 \in G$ нүктесі үшін

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (4)$$

(4) формуладан аламыз

$$\int_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0). \quad (5)$$

Аналитикалық функцияның n -ші ретті туындылары келесі формуламен анықталады

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (6)$$

Мысал. $\int_{AB} (\sin z + z^5)dz$, $z_A = 0$, $z_B = 2i$ интегралды есептеңіз.

Шешуі. Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша

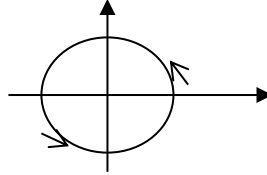
$$\int_{AB} (\sin z + z^5)dz = \int_0^{2i} (\sin z + z^5)dz =$$

$$= \left(-\cos z + \frac{z^6}{6} \right) \Big|_0^{2i} = -\cos 2i - \frac{29}{3}. \blacktriangle$$

Мысал. $\int_L z \cdot |z| dz$, $L = \{z \mid |z|=1, \operatorname{Im} z=0\}$ интегралды есептеңіз.

Шешуі. L қисығын мына түрде жазамыз: $|z|=1$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Интегралдау жолы сағат бағытына кері. $z = |z|e^{i\varphi} = e^{i\varphi}$ болса, онда $dz = ie^{-i\varphi} d\varphi$, мұнда $0 \leq \varphi \leq \pi$.



$$\begin{aligned} \int_L z \cdot |z| dz &= \int_0^\pi e^{i\varphi} \cdot 1 \cdot ie^{-i\varphi} d\varphi = i \int_0^\pi e^{2i\varphi} d\varphi = \frac{i}{2i} \left(e^{2i\varphi} \right) \Big|_0^\pi = \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2\pi + i \sin 2\pi - 1) = \frac{1}{2} (1 - 1) = 0. \blacktriangle \end{aligned}$$

Мысал. $\oint_{|z-\frac{1}{2}|=2} \frac{\cos z dz}{z \left(z + \frac{\pi}{2} \right) (z - \pi)}$ интегралды есептеңіз.

Шешуі. L қисығы - центрі $z = \frac{1}{2}$ радиусы 2 тең шеңбер.

$z_1 = 0$, $z_2 = -\frac{\pi}{2} \approx -1,57$; $z_3 = \pi \approx 3,14$ ерекше нүктелердің тек біреуі, яғни $z_1 = 0$ шеңбердің ішінде жатады. Интеграл астындағы функцияны келесі түрде қарастырамыз:

$$\frac{\cos z}{z \left(z + \frac{\pi}{2} \right) (z - \pi)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\cos z}{\left(z + \frac{\pi}{2} \right) (z - \pi)},$$

мұндағы $\frac{\cos z}{\left(z + \frac{\pi}{2} \right) (z - \pi)}$ функциясы L контурының ішіндегі аналитикалық функция.

(4) Кошидің интегралдық формуласы бойынша

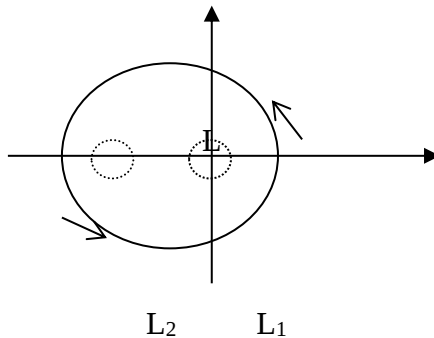
$$\oint_{|z-\frac{1}{2}|=2} \frac{\cos z dz}{z \left(z + \frac{\pi}{2} \right) (z - \pi)} = \oint_{|z-\frac{1}{2}|=2} \frac{\frac{\cos z}{\left(z + \frac{\pi}{2} \right) (z - \pi)}}{z} dz =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{\cos z}{\left(z + \frac{\pi}{2}\right)(z - \pi)} \Big|_{z_0=0} = 2\pi i \frac{1}{\frac{\pi}{2}(-\pi)} = -\frac{4i}{\pi}. \blacktriangle$$

Мысал. $\oint_{|z+1|=3} \frac{e^{z^2} dz}{z^3 + 2z^2}$ интегралды есептеңіз.

Шешуі. L қисығы - центрі $z = -1$ радиусы 3 тең шеңбер. Интеграл астындағы функция $z_1 = 0$, $z_2 = -2$ нүктелерден өзге осы қисықпен шектелген барлық нүктелерінде аналитикалық функция.

Берілген облыс -
үшбайланысты облыс -
 L , L_1 , L_2 , мұндағы L_1 , L_2
центрлері 0 және -2
нүктелерінде жататын
радиустары мейлінше
кіші шеңберлер.



Коши теоремасынан

$$\oint_{|z+1|=3} \frac{e^{z^2} dz}{z^3 + 2z^2} = \int_{L_1} \frac{e^{z^2} dz}{z^3 + 2z^2} + \int_{L_2} \frac{e^{z^2} dz}{z^3 + 2z^2}$$

Бірінші интегралға (5) формуланы қолданамыз

$$\begin{aligned} \int_{L_1} \frac{e^{z^2} dz}{z^2(z+2)} &= \int_{L_1} \frac{e^{z^2} dz}{z^2(z+2)} = \int_{L_1} \frac{e^{z^2}}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \left[\frac{e^{z^2}}{z+2} \right]_{z_0=0}' = \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{z^2} 2z(z+2) - e^{z^2}}{(z+2)^2} \right)_{z_0=0} = -\frac{\pi i}{2}. \end{aligned}$$

Екінші интегралды (6) формуламен есептейміз

$$\int_{L_2} \frac{e^{z^2} dz}{z^3 + 2z^2} = \int_{L_2} \frac{e^{z^2} dz}{z^2(z+2)} = \int_{L_2} \frac{e^{z^2}}{z+2} dz = \frac{2\pi i}{0!} \left[\frac{e^{z^2}}{z^2} \right]_{z_0=-2} = \frac{\pi i}{2} e^4,$$

$$\oint_{|z+1|=3} \frac{e^{z^2} dz}{z^3 + 2z^2} = -\frac{\pi i}{2} + \frac{\pi i}{2} e^4 = \frac{\pi i}{2} (e^4 - 1). \blacktriangle$$