

8-ДӘРІС. КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯ, ОНЫН ШЕГІ МЕН ҮЗІЛІССІЗДІГІ

Анықтама. Центрі z_0 нүктесінде орналасқан радиусы ε тең дөңгелектің ішкі нүктелерінің жиынының, яғни $|z - z_0| < \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын нүктелердің жиынын, z_0 нүктесінің ε аймағы деп атайды да былай белгілейді

$$U_\varepsilon(z_0) = \{z \in C : |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Комплекс сандар тізбегі

$$z_1, z_2, \dots, z_n \quad (1)$$

берілсін, мұндағы $z_n = x_n + iy_n$, $(n = 1, 2, \dots)$.

Анықтама. Егер қайсы бір $\varepsilon > 0$ санынан тәуелді $n = n_\varepsilon$ натурал саны табылып, n номерлері осы n_ε -нен артық болып келген $(n > n_\varepsilon)$ комплекс сандар тізбегінің мүшелері үшін $|z_n - z_0| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатын болса, онда z_0 санын комплекс сандар тізбегінің шегі деп атайды да былай белгілейді $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ немесе $z_n \rightarrow z_0 \quad n \rightarrow \infty$.

1-теорема. Комплекс сандар тізбегінің шегі $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$ бар болуы үшін

$$\operatorname{Re} z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_0, \quad \operatorname{Im} z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_0$$

болуы қажетті және жеткілікті.

Сонымен, (1) комплекс сандар тізбегі жинақты болса, онда олардың $\operatorname{Re} z_n$, $\operatorname{Im} z_n$ бөліктерінен құрылған тізбектер де жинақты және кері тұжырым да дұрыс болады.

2-теорема (Коши критеріі). (1) комплекс сандар тізбегі жинақты болуы үшін қайсы бір $\varepsilon > 0$ санынан тәуелді $n_\varepsilon \in N$ натурал саны табылып, барлық $n > n_\varepsilon$ және кез келген $p = 1, 2, \dots$ үшін $|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$ теңсіздігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

3-теорема. Кез келген жинақты тізбек әрқашан шектелген болады.

4-теорема (Больцано-Вейерштрасс теоремасы). Кез келген шектелген комплекс сандар тізбегінен белгілі бір тиянақты шекке ұмтылатын бөлімше тізбек бөліп алуға болады.

Егер $\{z'_n\}$, $\{z''_n\}$ екі комплекс сандар тізбектері берілсе және олар z'_0 , z''_0 -ке ұмтылса, онда мына тізбектерінің

$$\{z'_n \pm z''_n\}, \{z'_n \cdot z''_n\}, \left\{ \frac{z'_n}{z''_n} \right\}$$

шектері бар болады да келесі арақатыстар орындалады:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z'_n \pm z''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} z''_n = z'_0 \pm z''_0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z'_n \cdot z''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} z''_n = z'_0 \cdot z''_0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z'_n}{z''_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} z'_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} z''_n} = \frac{z'_0}{z''_0}, \quad z''_0 \neq 0.$$