

Дәріс №3.

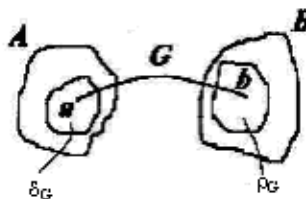
Сәйкестік және оның қасиеттері. Функциялар мен бейнелеулер.

Сәйкестік және оның қасиеттері

Сәйкестіктер – жиын элементтерінің арасындағы өзара байланысты беру тәсілі. Оның дербес жағдайлары: функциялар, бейнеулер, түрлендірулер, т.б.

Анықтама. A, B жиындарының арасындағы сәйкестік деп бұл жиындардың тура (декарт) көбейтіндісінің G ішкі жиынын айтады.

$G \subseteq A \times B$ Егер $(a, b) \in G$ болса, G сәйкестігінде b a -ға сәйкес деп айтады. $\delta_G = \{a | (a, b) \in G\}$, G сәйкестігінің анықталу облысы, ал $\rho_G = \{b | (a, b) \in G\}$ мәндер жиыны деп аталады.



Анықтама. Егер $\delta_G = A$ болса толық анықталған сәйкестік, $\delta_A \subseteq A$ болса толық емес (жартылай) сәйкестік болады (толық анықталмаған).

Анықтама. Егер $\rho_G = B$ – сюръективті сәйкестік деп аталады (B -ның әрбір элементінің A прообразы бар).

Анықтама. A жиынының әрбір $a \in A$ элементіне B жиынының G сәйкестігіндегі a -ға сәйкес барлық $b \in B$ элементтерінің жиыны a элементінің образы, ал әрбір $b \in B$ элементіне A жиынының G сәйкестігіндегі b -ға сәйкес барлық $a \in A$ элементтерінің жиыны b элементінің A жиынындағы прообразы деп аталады.

Анықтама. Барлық $a \in C \subseteq \rho_G$ элементтерінің образдарының жиыны C жиынының образы деп аталады. Барлық $b \in D \subseteq \rho_G$ элементтерінің прообраздарының жиыны D жиынының прообразы деп аталады.

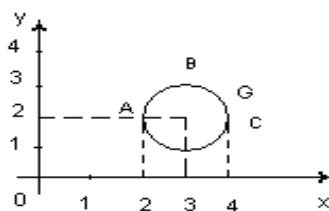
Анықтама. Егер анықталу облысынан (δ_G) алынған кез келген a элементінің мәндер жиынында (ρ_G) бір ғана образы $b \in \rho_G$ болса, G – функционал (бір мәнді) сәйкестік деп аталады.

Анықтама. Егер G сәйкестігі толық анықталған, сюръективті, функционалды және $\forall b \in \rho_G$ элементінің анықталу облысында бір ғана прообразы $a \in \delta_G$ болса, онда G өзара бір мәнді сәйкестік болады.

Егер A мен B жиындарының арасында өзара бір мәнді сәйкестік болса, онда олардың қуаттары тең және олар тең қуатты жиындар $|A| = |B|$ деп аталады. Бұл фактілер жиынды санамай-ақ, олардың тең қуаттылығын анықтауға болатындығын көрсетеді. Қуаты белгілі немесе оңай санауға болатын басқа жиынмен өзара бір мәнділігін дәлелдеу арқылы жиын элементтерін санамай-ақ оның қуатын анықтауға болады. N натурал сандар жиыны мен тең қуатты жиындар *саналымды жиын* деп аталады.

R нақты сандар жиынымен тең қуатты сандар континуальды деп аталады.

1- мысал. Айталық, $G: (x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 1$ қатынасын қанағаттандыратын барлық (x, y) нақты санды сандар жиыны болсын. $G = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R} \text{ үшін } (x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$ сәйкестігінің графикалық кескіні центрі $(3, 2)$ нүктесінде болатын, радиусы 1-ге тең дөңгелек. Бұл G дөңгелегі R мен R арасындағы сәйкестік (яғни OX өсі мен OY өстерінің арасындағы сәйкестік).



а) 2, 3, 4 сандарының образы мен прообраздарын табу керек.

Шешуі: $2 \in \delta_G$ G сәйкестігіндегі образы жалғыз ғана $2 \in \rho_G$, 3-ң G сәйкестігіндегі образы $[1,3]$ кесіндісіндегі барлық нақты сандар жиыны, 4-ң образы 2. G сәйкестігінің мәндер жиыны ρ_G алынған ($2 \in \rho_G$) 2 санының G сәйкестігіндегі прообразы $[2,4] \subseteq \delta_G$; $3 \in \rho_G$ G сәйкестігіндегі прообразы $3 \in \delta_G$. $4 \in \rho_G$ – G сәйкестігінде прообраздары жоқ.

б) 1) $[2,3] \in \delta_G$ сандарының образы осы $[2,4]$ кесіндідегі барлық образдарының бірігуі, яғни $[1,3] \subset \rho_G$;

2) Осыған ұқсас $[2,4]$ кесіндісінің G сәйкестігіндегі образы $[1,3]$;

3) $[2,3]$ кесіндісінің прообразы $[2,4]$; $[2,4] \subset \rho_G$ прообразы $[2,4]$;

Егер G сәйкестігі нақты сандар жиынында анықталған десек, яғни $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ онда

1) G – толық анықталмаған себебі, $\delta_G \neq \mathbb{R}$ ($\delta_G \subset \mathbb{R}$);

2) Сюръективті емес себебі, $\rho_G \neq \mathbb{R}$ ($\rho_G \subset \mathbb{R}$);

3) Функционалды (бір мәнді) емес, себебі $[2,4] = \delta_G$ үшін (2 мен 4-тен басқа) образдар жалғыз емес;

4) Өзара бір мәнді болудың қажетті шарттары (1, 2, 3 шарттар) орындалмағандықтан сәйкестік өзара бір мәнді емес.

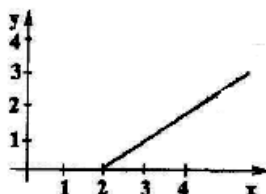
Егер сәйкестік $G \subseteq [2,4] \times [1,3]$ болса G толық анықталған және сюръективті, бірақ функционалды және өзара бір мәнді емес.

2-мысал. Айталық G сәйкестігі $x-2=y$, $x, y \geq 0$ түзуінің бойындағы нүктелер жиыны

$G = \{(x, y) | x-2=y, x, y \geq 0\}$;

$G = \{\text{элементтері } x-2=1 \text{ қатынасын қанағаттандыратын нүктелер жиыны}\}$.

G – сәйкестігінің қандай қасиеттері бар?



Шешуі: Егер G нақты сандар жиынында берілген сәйкестік ($G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) болса, онда:

1) G толық анықталмаған сәйкестік, себебі

$\delta_G = [2, \infty) \subset \mathbb{R}$;

2) Сюръективті емес, себебі анықталу облысы $\rho_G = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ нөлмен қоса алғанда барлық нақты сандар жиыны.

3) Функционалды, себебі $\forall x \in \delta_G$, ρ_G – анықталу облысынан алынған әрбір x -ке бір ғана $y \in \rho_G$ сәйкес (x -ң бір ғана образы бар).

4) Өзара бір мәнді емес, себебі толық анықталмаған және сюръективті емес.

2. G сәйкестігі нөлмен қоса алғандағы $\mathbb{R}_+$ жиынында яғни $G \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ берілген болса, онда G сәйкестігінің төмендегідей қасиеттері болады: толық анықталмаған, себебі $\delta_G = [2, \infty)$ және $\delta_G \subset \mathbb{R}_+$;

- сюръективті, себебі анықталу облысы $\rho_G = \mathbb{R}_+$;

- функционалды;

- өзара бір мәнді емес, себебі толық анықталмаған.

3. G сәйкестігі $G \subseteq [2, \infty) \times \mathbb{R}_+$ болса:

- толық анықталған;

- сюръективті;
- функционалды;
- өзара бір мәнді, себебі алдыңғы аталған қасиеттерге қоса, анықталу облысынан алынған кез келген $y \in \rho_f$ үшін бір ғана прообраз бар.

Функциялар мен бейнелеулер

Айталық, A, B жиындарында $f \subseteq A \times B$ сәйкестігі бар болсын.

Анықтама. Егер $\delta_f = A, \rho_f = B$ және $(x, y), (x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f$ болғандығынан $y_1 = y_2$ болса, онда $f \subseteq A \times B$ сәйкестігі функция деп аталады және $f: A \rightarrow B$ немесе $A \xrightarrow{f} B$ болып жазылады. Бұл анықтамадан функция дегеніміз функционал сәйкестік екендігін көреміз және f функциясының типі $A \rightarrow B$ деп оқылады. f функциясы анықталу облысының әрбір элементіне (x) мәндер облысынан бір мәнді (y) сәйкестендіреді және $y = f(x)$ болып белгіленеді. x аргумент, y функцияның мәні) болып жазылады (y x -тың образы).

Мысалдар:

$f = \{(1,2), (2,3), (3,2)\}$ – функция;

$f = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$ – функция емес;

$\{(x, x^2 - 2x + 3), x \in \mathbb{R}\}$ – функция; бұл функция әдетте $y = x^2 - 2x + 3$ болып жазылады.

Анықтама. Толық анықталған функция $f: A \rightarrow B$ A -ны B -ға іштей бейнелеу деп аталады.

$f: A \xrightarrow{\text{іштей}} B$ ($\delta_f = A, \rho_f \subseteq B$) толық анықталған функция.

Анықтама. Егер $\rho_f = B$ болса функция сюръективті функция деп аталады.

Анықтама. Егер функция толық анықталған ($\rho_f = A$) және сюръективті ($\rho_f = B$) болса, онда ол A -ны B -ға **толық бейнелеу** деп аталады: $f: A \xrightarrow{\text{толық}} B$ болып жазылады.

Анықтама. $A \xrightarrow{\text{іштей}} A$ бейнелеу A жиынын түрлендіру, ал $A \xrightarrow{\text{толық}} A$ бейнелеуі A -ға алмастыру деп аталады $A \xleftarrow{\text{Алмастыру}} A$ болып та белгіленеді.

Сәйкестік	Міндетті түрде болу керек қасиеті		
	Функционалды	Толық анықталған	Сюръективті
Функция	+		
A -ны B -ға іштей бейнелеу	+	+	
A -ы B -ға толық бейнелеу	+	+	+

f және g функциялары тең болады, егер төмендегі шарттар орындалса:

- Олардың анықталу облыстары біреу - ол A жиыны;
- Кез келген $a \in A$ үшін $f(a) = g(a)$.

$f: A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B$ типті функция n -орынды функция деп аталады. Бұл жағдайда функцияның n аргументі бар деп түсіну келісілген.

$f(a_1, \dots, a_n) = b$, мұндағы $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n, b \in B$. Айталық, $G \subseteq A \times B$ сәйкестігі берілсін. Тек $(a, b) \in G$ болса ғана $(b, a) \in H$ болатын $H \subseteq B \times A$ сәйкестігі, G -ң кері сәйкестігі деп аталады және G^{-1} болып белгіленеді.

Анықтама. Егер $f: A \rightarrow B$ сәйкестігіне кері сәйкестік функционалды болса (яғни әрбір $b \in \rho_f$ үшін бір ғана $a \in \delta_f$ болса), онда ол f функциясына кері функция деп аталады, f^{-1} болып белгіленеді.

Кері сәйкестікте образ бен прообраздың орындары ауысып келетіндіктен f функциясына кері функция болу үшін $f: A \rightarrow B$ f функциясының мәндер жиынының әрбір $b \in \rho_f$ элементінің жалғыз ғана образы болу керек. Бұдан $f: A \rightarrow B$ функциясы өзінің анықталу облысы мен мәндер облысының өзара бір мәнді сәйкестігі болса ғана оған кері функция болатындығы көрінеді.

Егер $h(x) = g(f(x))$, мұндағы, $x \in A$ орындалса $h: A \rightarrow C$ функциясы f және g функцияларының композициясы деп аталады және $f(g)$ белгіленеді.

Көбіне h функциясы f -ті g -ң орнына қойғаннан алынды деп айтады. Көп орынды

$f: A^m \rightarrow B$, $g: B^n \rightarrow C$ функциясы үшін f -ті g -ға қоюдың әртүрлі нұсқалары бар. Нәтижесінде әртүрлі типтегі функциялар алынады.

Мысалы, $m = 3$ және $n = 4$ үшін $h = g(x_1, f(y_1, y_2, y_3), x_3, x_4)$ функциясында 6 аргумент бар ал оның типі $B \times A^3 \times B^2 \rightarrow C$. Аргументтерін басқаша атап $f_1, \dots, f_n$ функцияларын бір-біріне қойғаннан алынған функция $f_1, \dots, f_n$ функцияларының суперпозициясы деп аталады. Бұл суперпозицияны және функционалдық белгі мен аргументтердің символдарын сипаттайтын өрнек формула деп аталады.

Функциялардың берілу тәсілдері:

- График түрінде;
- Кесте;
- Функцияны басқа функциялардың суперпозициясы түрінде сипаттайтын формула түрінде;

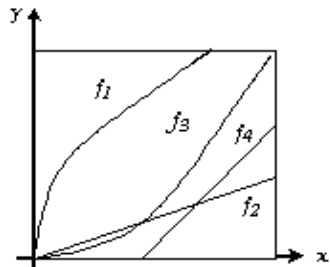
Анықтама. Егер f^{-1} сәйкестігі толық емес функция болса, яғни $\forall x_1, x_2 \in \delta_f$ үшін, $x_1 \neq x_2$ болғандығынан $f(x_1) \neq f(x_2)$ болса, f функция инъективті (инъекция) функция деп аталады. Егер f – инъекция болса $f: A \xrightarrow{1-1} B$ болып белгіленеді.

Анықтама. Егер $\rho_G = B$ болса $f: A \rightarrow B$ функциясы сюръективті (сюръекция) функция деп аталады $f: A \xrightarrow{\text{толық}} B$.

Анықтама. Егер f инъективті және сюръективті болса, ол биективті деп аталады: $f: A \leftrightarrow B$

Анықтама. Егер f A -ы B -ң әр түрлі мәндеріне бейнелесе, онда f функциясы өзара бір мәнді сәйкестік немесе биективті функция (биекция) деп аталады. Сонымен, егер функция сюръективті және инъективті болса, функция биекция болады. Егер f A мен B арасындағы биекция болса, $f: A \leftrightarrow B$ болып жазылады. $F: A \leftrightarrow A$ биекциясы A жиынының (подстановка) алмастыруы деп аталады.

Суретте графиктік түрде функциялар берілген



$$f_i : [0,1] \rightarrow [0,1], \quad i \in \{1,2,3,4\}$$

f_1 – сюръективті, инъективті емес

f_2 – инъективті, сюръективті емес

f_3 – инъективті, сюръективті – биекция

f_4 – инъективті де емес, сюръективті де емес

2-мысал: Үш функцияны қарастырайық $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1,2,3$:

1) $f_1(x) = e^x$ инъективті, сюръективті емес

2) $f_2(x) = x \cdot \sin x$ сюръективті, инъективті емес

3) $f_3(x) = 2x - 1$ биективті;