

## Дәріс№2.

**Жиындардың декарттық көбейтіндісі және оның қасиеттері. Жиындар алгебрасының негізгі заңдары.**

$x_1...x_n$  n элементтен тұратын реттелген тізбекті  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  немесе  $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  деп белгілеуге болады. Мұндағы дөңгелек, бұрышты жақшалар элементтердің жазылу ретін көрсету үшін ғана қолданылады. Мұндай нөмірлерінің ретіне қарай орналасқан тізбек ұзындығы реттелген тізбек немесе ұзындығы n болатын кортеж деп аталады.  $x_i$  элемент  $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  кортежінің i-ші координатасы деп аталады.

Мысал: {a,b,c} және {1,2} жиындарынан ұзындығы 2-ге тең неше кортеж құруға болады?

Шешуі: 6 кортеж құруға болады: (a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)

Кез келген әріптерден құралған сөз кортеж, натурал сандардың ондық жүйедегі жазылуы цифрлардан тұратын кортеж т. б.

Кез-келген координаттары әртүрлі реттелген ақырлы жиын кортеж. Ұзындығы 2-ге тең кортеждер реттелген жұптар, ұзындығы 3-ке тең кортеждер реттелген үштіктер, ұзындығы n-ге реттелген n-діктер деп аталады. Жиындар екі элементпен алу амалының көмегімен төмендегі ережеге сәйкес кодталады.

$$\langle \rangle \Leftrightarrow \emptyset, \langle x_1 \rangle \Leftrightarrow x_1, \langle x_1, x_2 \rangle \Leftrightarrow \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}, \langle x_1, \dots, x_n \rangle \Leftrightarrow \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle, x_{n+1} \rangle$$

Анықтама. Екі кортеж ұзындықтары бірдей, әрі бірдей нөмірлі координаттары тең болса ғана тең болады. Яғни  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  кортеждері  $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$  болғанда ғана тең болады ( $x = y$ ).

Мысалы:

$(1^2, 2^2, 3^2)$  және  $(\sqrt{1}, \sqrt{16}, \sqrt{81})$  кортеждері тең.

$(1,2,3)$  және  $(3,1,2)$  әртүрлі;  $(1,2,3)$  және  $(1,2,3,4)$  әртүрлі;

$(1,2) \neq (2,1)$ , ал  $\{1,2\}$  және  $\{2,1\}$  жиындары тең.

Кортеждердің координаттары жиын, кортеж т. б. болуы мүмкін.

Мысалы,  $(\{a,b\}, c) = (\{b,a\}, c)$  себебі  $\{a,b\} = \{b,a\}$ , ал  $((a,b), c)$  және  $((b,a), c)$  кортеждері тең емес, себебі  $(a,b) \neq (b,a)$ . Бір де бір координаты жоқ кортеж (ұзындығы 0) бос кортеж деп аталады.

Сонымен жиын мен кортеж ұғымдарының айырмашылығы:

а) жиындардың элементтерінің орны, реті бәрі бір, ал кортеждерде элементтерінің ұзындығы бірдей болып элементтерінің реті басқаша болса тең емес (құрамы бірдей болса да);

б) жиында элементтер әртүрлі, кортежде бірдей бола береді.

Анықтама. A және B жиындарының тура (декарт) көбейтіндісі деп элементтері реттелген  $(x, y)$  жұбынан тұратын жиынды айтамыз. Мұндағы,  $x \in A$ , ал  $y \in B$ . Декарт көбейтіндісі әр түрлі жиын элементтерінен құралады және  $A \times B$  болып белгіленеді:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ және } y \in B\}.$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$  жиындары үшін Декарт көбейтіндісі?

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{m=1}^n A_m = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\} \text{ болады.}$$

Егер  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$  болса, онда  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  жиыны A жиынының n-ші Декарт дәрежесі деп аталады және  $A^n$  болып белгіленеді. Анықтама бойынша  $A^0 = \{\emptyset\}$

Мысалдар:

1.  $A = \{1,2\}$ ,  $B = \{3,4\}$  берілсін.

$A \times B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$ ;

$B \times A = \{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}$ ;

$A \times A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$ ;

Бұл мысалдардан  $A \times B \neq B \times A$ .

2. (Шахмат тақтасы).

$A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ ;  $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$  жиындары берілсін. Олай болса әр  $(x,y)$  жұбына  $x,y \in A \times B$  шахмат тақтасының торлар жиыны сәйкес келеді.

3.  $[0,1]^2$  жиыны  $\{(a,b) \mid 0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1\}$ . Бұл жиынға жазықтықтың 1-ден аспайтын теріс емес координаттары бар нүктелер жиыны сәйкес келеді.

4.  $A=\{a,b,c\}$ ;  $B=\{1,2\}$ ;  $A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$ ;

$B \times A = \{(1,a),(2,a),(1,b),(2,b),(1,c),(2,c)\}$ ;  $\underline{A} \times \underline{B} \neq \underline{B} \times \underline{A}$

5.  $A=\{1,2,3\}$ ;  $A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$ ;

6.  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ;  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ;  $X, Y$  - жиындарының Декарт көбейтіндісін табайық. Декарт көбейтіндісінің элементтері әр түрлі жиын элементтерінен алынған жұптардан тұратындығы белгілі.

Оларды кестеге орналастырайық: Бұл кестеде  $m$  жол,  $n$  бағаннан тұратын элементтер жұбын көреміз.  $\mu(x,y)$  - саны  $x$  элементтерінің жиыны мен  $y$  элементтерінің жиындарының көбейтіндісіне тең.  $\mu(x,y) = \mu(x) \cdot \mu(y)$  (1)

Бұл жиындарды көбейту ережесі. Егер декарт көбейткіштері  $n$  жиыннан тұрса, онда (1) төмендегідей жалпылауға болады:

| $y_i$ | 1            | 2            | ... | n            |
|-------|--------------|--------------|-----|--------------|
| $x_i$ |              |              |     |              |
| 1     | $(x_1, y_1)$ | $(x_1, y_2)$ | ... | $(x_1, y_n)$ |
| 2     | $(x_2, y_1)$ | $(x_2, y_2)$ | ... | $(x_2, y_n)$ |
| ...   | ...          | ...          | ... | ...          |
| m     | $(x_m, y_1)$ | $(x_m, y_2)$ | ... | $(x_m, y_n)$ |

$$\mu(x_1 * x_2 * \dots * x_n) = \mu(x_1) \cdot \mu(x_2) \dots \mu(x_n) \quad (2)$$

$A \times B \times C$ ;  $(A \times B) \times C$ ;  $A \times (B \times C)$  жиындары да әр түрлі.

$A \times B \times C - (a,b,c)$ ;  $(A \times B) \times C - ((a,b),c)$   $a \in A, b \in B, c \in C$ ;  $A \times (B \times C) = (a,(b,c))$ .

Егер  $A, B$  жиындарының бірі бос болса, олардың Декарт көбейтіндісі де бос деп есептеледі.  $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$ ;

$$\text{Мысал, } A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2, b_3\}; \quad A \times B = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix};$$

Декарт көбейтінді қарапайым амал емес, себебі

1)  $A \times B \neq B \times A$  (неге?) – коммутативтік емес

2)  $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$  – ассоциативтік емес, себебі

$L = (A \times B) \times C = \{((a, b), c) \mid (a, b) \in A \times B, c \in C\}$  – сол жағы

Оң жағы  $R = A \times (B \times C) = \{(a, (b, c)) \mid a \in A, (b, c) \in B \times C\}$

Бірақ, декарт көбейтінді дистрибутивті:

$A \times (B * C) = (A \times B) * (A \times C) * \in \{\cup, \cap, \oplus\}$ . Мысалы:  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ,

$A \times (B \oplus C) = (A \times B) \oplus (A \times C)$

2. Кардинал дәреже:  $A^B = \{f: B \rightarrow A\}$ .

$$\text{Негізгі қасиеті: } |A^B| = |A|^{|B|}$$

3. Жиындар алгебрасының негізгі заңдары:

$A * A * \dots * A = A$ ,  $* \in \{\cup, \cap\}$ :

а)  $A \cup \dots \cup A = A$

$A \cap \dots \cap A = A$  - идемпотентті (idempotent ion) заңы

б)  $A * B = B * A$ ,  $* \in \{\cup, \cap, \oplus\}$  – коммутативтік заң,

в)  $A * (B \Delta C) = (A * B) \Delta (A * C)$ ,  $*, \Delta \in \{\cup, \cap, \oplus\}$  ( $* \neq \Delta$ ) – дистрибутивті заң.