

1-дәріс.

Жиын ұғымы. Жиынның түрлері. Жиындарға қолданылатын амалдар және олардың қасиеттері.

Жиын ұғымы – негізгі математикалық терминдердің бірі болып саналады. Жиынның нақтылы анықтамасы жоқ. Жиынды ортақ бір белгі бойынша біріккен объектілердің жиынтығы деуге болады. Мысалы натурал сандар жиыны, түзудің бойындағы нүктелер жиынтығы, кітап беттерінің жиынтығы, кітап бетіндегі түрлі символдар жиыны, студенттер тобы т.б. мысалдарды көптеп келтіруге болады. Егер x объектісі M жиынының элементі болса, онда x M -ге тиісті делінеді және $x \in M$ болып белгіленеді. x -тің жиынға жатпауы $x \notin M$ немесе $x \bar{\in} M$ белгіленеді. Әдетте жиын латын алфавитінің бас әріптерімен, ал оның элементтері кіші әріптерімен белгіленеді.

Жиындардың өрнектелуі

Жиындарды өрнектеу үшін оған қандай элементтердің жататындығын көрсету керек. Оны бірнеше әдістермен жасауға болады.

1. *Жиынға жататын элементтер тізімін көрсету арқылы.* Тізіммен тек ақырлы жиындарды көрсетуге болады. Тізім фигуралы жақшамен қоршалады: $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Мысалы, процессор a , монитор b , клавиатура c және принтерден d тұратын компьютер A жиынын былай өрнектеуге болады: $A = \{a, b, c, d\}$

2. *Жиын элементтерінің (сипаттамалық предикат арқылы) немесе қандай да бір қасиетін көрсету арқылы.* Айталық $P(x)$ A жиынының элементтері қанағаттандыратын я қанағаттандырмайтын қандай да бір қасиет болсын. Олай болса A жиынының P қасиетін қанағаттандыратын барлық элементтерінен тұратын M жиыны $M = \{x \mid P(x)\}$ немесе $M = \{x : P(x)\}$ деп жазылады.

Ескерту: Сипаттамалық предикат $P(x)$ – логикалық тұжырым формасындағы шарт (немесе логикалық мән қайтаратын процедура). Егер жиын элементі үшін шарт орындалса элемент жиынға жатады, әйтпесе жатпайды. Мысалы, барлық натурал жұп сандар жиыны M_{2n} , $M_{2n} = \{x : x = 2n, n \in N\}$ болып, ал компьютердің сыртқы құрылғылар жиыны $A = \{x : x \text{ – PC сыртқы құрылғылар жиыны}\}$ болып өрнектеледі.

3. *Туындатқыш процедура арқылы:* $M = \{x \mid x : = f\}$.

Туындатқыш процедура дегеніміз – алдыңғы алынған элементтерден немесе объектілерден жиын элементтерін алу әдісі болып табылады. Туындатқыш процедура іске қосылған кезде алынған объектілер жиынның элементі болып отырады. Мысалы, 2-ң дәрежесі болып табылатын барлық бүтін сандар жиынын M_{2^n} , $n \in N$, ($M_{2^n} = 1, 2, 4, 8, 16, \dots$) рекурсивті немесе индуктивті деп аталатын 2 түрлі тәртіппен алынатын туындатқыш процедура арқылы өрнектеуге болады

а) $1 \in M_{2^n}$; б) егер $m \in M_{2^n}$ болса, онда $2m \in M_{2^n}$.

Мысалдар:

1. Барлық натурал сандар жиынын әртүрлі әдістермен өрнектеңіз: 1, 2, 3,...

Шешуі: N натурал сандар жиыны шексіз болғандықтан оны тізім арқылы өрнектеуге болмайды.

Туындатқыш процедура екі ережеден тұрады:

а) $1 \in N$; б) егер $n \in N$, онда $n+1 \in N$.

N жиыны элементтерінің қасиеттерін сипаттау арқылы: $N = \{x : x \text{ – бүтін оң сан}\}$.

2. Айталық $U = \{a, b, c\}$. Айқын түрде (элементтерін тізбектеу арқылы) U жиынының элементтерінен тұратын барлық ішкі жиындардың жиыны $\beta(U)$ булеанын анықтаңыз. $\beta(U)$ жиынының қуаты қандай?

Шешуі: $\beta(U) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$, $|\beta(U)| = 8$.

Анықтама. Егер A жиынының барлық элементтері B жиынында жатса, онда A жиыны B жиынының *ішкі жиыны* деп аталады да, $A \subseteq B$ деп белгіленеді, A жиыны B жиынына *кіреді* деп оқылады ($A \not\subseteq B$ – A жиыны B -ның ішкі жиыны емес). Бұдан шығатын тұжырым:



$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$, яғни кез келген x үшін, егер $x \in A$ болса, онда $x \in B$.

Анықтама A мен B жиындары тең болады, егер $A \subseteq B$ және $B \subseteq A$ болса, яғни тең жиындар бірдей элементтерден құралады. ($A \subseteq B$ және $B \subseteq A$) A, B жиындары бір-бірінің ішкі жиыны. Мысалдар:

$N \subseteq Z, Z \subseteq Q, Q \subseteq R, R \subseteq C$ дұрыс.

$M_1 = \{x \mid \sin x = 1\}$ және $M_2 = \{x \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z\}$ жиындарының тең екендігін ($M_1 = M_2$) дәлелдеу керек болсын.

Шешуі. а) Егер $x \in M_1$ болса, онда $x \mid \sin x = 1$ теңдеуінің шешімі болғаны, яғни оны $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$ деуге болады. Демек, жиынның анықтамасы бойынша $x \in M_2$. Олай болса $M_1 \subseteq M_2$.

в) Егер $x \in M_2$ болса, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$ деуге болады, яғни онда x мәні $\sin x = 1$ теңдеуінің шешімі. Демек $M_2 \subseteq M_1$ бұдан $M_1 = M_2$.

Анықтама. Егер $A \subseteq B$ және $A \neq B$ болса, онда A жиыны B -ға *қатаң кіреді* дейміз және A жиыны B -ның *меншікті ішкі жиыны* деп аталады. Анықтамаларға байланысты төмендегідей тұжырымдарды жазуға болады:

1. $\forall X: X \subseteq X$; 2. $\forall M: \emptyset \subset M$; 3. Егер $X \subseteq Y$, ал $Y \subseteq Z$, онда $X \subseteq Z$; 4. $X \subseteq Y$, ал $Y \subseteq X$, болса, онда $X = Y$;

Жиындардың теңдігін дәлелдеу үшін олардың бір-біріне ішкі жиын болатындығын көрсету керек.

Элементтің жиынға жатуы ($\in$) мен жиынның басқа жиынның ішкі жиын болуын ($\subseteq$), яғни жиынның басқа жиынға кіруі ұғымдарын шатастырмау керек ($\in, \subseteq$). $O \in \{o\}$ және $\{o\} = \{\{o\}\}$ болғанымен $O \in \{\{o\}\}$ деу дұрыс емес, себебі $\{\{o\}\}$ жиынының жалғыз ғана элементі $\{o\}$ бар. (o – элементі бола алмайды).

Анықтама. Элементтердің ақырлы санынан тұратын жиын, *ақырлы жиын* деп аталады, керісінше болса *ақырсыз жиын* деп аталады. Мысалы N, R жиындары ақырсыз.

Анықтама. Ақырлы жиындардағы элементтердің саны жиынның *қуаты* деп аталады және $| \cdot |$ белгілерімен қоршалып жазылады. Мысалы, M – ақырлы жиын болса, оның қуаты $|M|$. Қуаты 0-ге тең жиын, яғни элементтері жоқ жиын *бос жиын* деп аталады және $\emptyset$ белгіленеді $|\emptyset| = 0$. ($|\{\emptyset\}| = 1$ емес) Бос жиын кез-келген жиынның ішкі жиыны болады деп есептеледі. Егер A және B жиындары тең болса, олар тең қуатты жиындар деп аталады.

Мысалдар:

1. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}, A \neq B$.

2. $A = \{1, 2, 3, 4\}; B = \{4, 3, 1, 2\}; A = B$, себебі $A \subset B, B \subset A$;

3. $A = \{1, 2, 3\}; B = \{2, 4, 6\}; C = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \subset C; B \not\subset C$.

Анықтама. A жиынының барлық ішкі жиындарының жиынтығы *булеан* немесе *дәрежелі жиын* деп аталады және $P(A)$ деп белгілінеді (2^A деп те белгіленеді). Сонымен, $2^A = P(A) \Leftrightarrow \{B \mid B \subseteq A\}$ немесе 2^A . Мысалдар: Егер $A = \{1, 2, 3\}$ болса, $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Анықтама. Қарастыруға болатын барлық мүмкін элементтерден тұратын жиын *универсал* немесе *универсум* деп аталады және U деп белгіленеді.

Жиындармен операциялар (амалдар).

$P(U)$ булеанындағы операцияларды және олардың геометриялық кескінделулерін қарастырамыз.

Қиылысу операциясы. Егер $A, B \subseteq P(U)$ онда, осы A, B жиындарының екеуіне де тиісті элементтерден тұратын жиынды A, B жиындарының қиылысуы деп атайды және ол төмендегідей өрнектеледі:

$$A \cap B \triangleq \{x \mid x \in A \text{ \& } x \in B\};$$

Мысалы, $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$ болса, онда $A \cap B = \{3\}$;

Бірігу операциясы. A, B жиындарының ең болмаса біреуіне тиісті элементтерден тұратын жиынды A, B жиындарының бірігуі деп атайды және ол төмендегідей өрнектеледі:

$$A \cup B \triangleq \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Мысалы, $A = \{1, 2, 3, 4\}$;

$B = \{4, 3, 6, 7\}$ болса, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$

A, B жиындарының қиылысуын олардың көбейтіндісі $(A \cdot B)$, ал бірігуін олардың қосындысы $(A + B)$ деп те атайды

Жиындардың айырымы. A жиынының B -ға кірмейтін элементтерінен тұратын жиынды A, B жиындарының айырымы деп атаймыз және ол төмендегідей өрнектеледі:

$$A \setminus B \triangleq A - B \triangleq \{x \mid x \in A \text{ және } x \notin B\}.$$

Мысалы, $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$ болса, онда $A \setminus B = \{1, 2\}$; $B \setminus A = \{4, 5\}$;

Сақиналы қосынды. A, B жиындарының өзара айырымдарының бірігуін сақиналы қосынды немесе симметриялық айырым деп атайды $A \oplus B \triangleq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ болып белгіленеді. $(A \setminus B) \neq (B \setminus A)$.

Мысалы, $A = \{1, 2, 3, 4\}; B = \{4, 3, 6, 7\}$;

$$A \setminus B = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3, 4, 6, 7\} = \{1, 2\}$$

$$B \setminus A = \{3, 4, 6, 7\} \setminus \{1, 2, 3, 4\} = \{6, 7\};$$

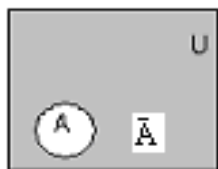
$$A \oplus B = \{1, 2, 6, 7\};$$

Симметриялық айырымның тағы бір формуласы:

$$A \oplus B = A \div B = A \oplus B \triangleq (A \cup B) \setminus (A \cap B);$$

$$A \oplus B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\} \setminus \{3, 4\} = \{1, 2, 6, 7\}.$$

Жиынының толықтауышы. U универсумындағы A -ға тиісті емес элементтер U универсумындағы A жиынының толықтауышы деп аталады (A -ны U -ға дейін толықтыратын) $\bar{A} \triangleq U \setminus A$ болып белгіленеді.



Мысалы, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ жиынының толықтауышы. $\bar{A} = \{6, 7\}$; $B = \{4, 3, 6, 7\}$ жиынының толықтауышы $\bar{B} = \{1, 2\}$; $\{\cap, \cup, -\}$ операциялары буль операциялары деп аталады.

Анықтама. Жиындардың геометриялық кескіндері *Эйлер-Венн диаграммалары* деп аталады. Біріктіру, қиылысу операцияларын кез-келген жиындардың жиыны болатын A_i (мұндағы $i \in I$ жиынының элементтерін қабылдайды) жиынына да анықтауға болады:

Айталық I – элементтері индекс ретінде қолданылатын қандай да бір жиын болсын және $\forall i \in I$ үшін A_i белгілі болсын. Олай болса, қиылысу $\cap \{A_i \mid i \in I\}$ мен бірігуді $\cup \{A_i \mid i \in I\}$ төмендегідей анықтауға болады. $\cap \{A_i \mid i \in I\} = \{x \mid x \in A_i, \forall i \in I\}$ (кез-келген, барлық) $i \in I$ үшін $\}; \cup \{A_i \mid i \in I\} = \{x \mid x \in A_i, \exists (\text{ең болмағанда бір } i \in I \text{ үшін})\}$ теңдіктерімен

беріледі. Көбінесе, $\cap \{A_i \mid i \in I\}$, $\cup \{A_i \mid i \in I\}$ орнына $\bigcap_{i \in I} A_i$, $\bigcup_{i \in I} A_i$ немесе мәтінінен I жиынының қандай екендігі белгілі болса жай ғана $\cap A_i$, $\cup A_i$ белгілерін қолданады. $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \forall i \in I\}$; $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \exists i \in I\}$; Егер $I = \{1, 2, \dots, n\}$ болса $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$; $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$; $\bigcap_{i=1}^n A_i$ және $\bigcup_{i=1}^n A_i$ белгілеулері қолданылады.

Жиындарға қолданылатын операциялардың қасиеттері

Айталық U универсумы берілсін. Олай болса $\forall A, B, C \subset U$ төмендегідей қасиеттер орындалады:

1. $\cap, \cup$ операцияларының ассоциативтігі

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

2. $\cup, \cap$ операцияларының коммутативтігі

$$A \cup B = B \cup A;$$

$$A \cap B = B \cap A$$

3. Дистрибутивті заң (үлестіру заңы)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4. Идемпотенттік заң

$$A \cup A = A; \quad A \cap A = A$$

5. Жұтылу заңы

$$A \cup (A \cap B) = A; \quad A \cap (A \cup B) = A$$

6. Де Морган заңы

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

7. Нөл мен бір заңы, айталық $0 \Leftrightarrow \emptyset$, $1 \Leftrightarrow U$ онда

$$A \cup \emptyset = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset;$$

$$A \cup 1 = 1; \quad A \cap 1 = A;$$

$$A \cup \overline{A} = 1; \quad A \cap \overline{A} = \emptyset$$

8. Қос терістеу заңы (инволютивность)

$$\overline{\overline{A}} = A$$

9. Толықтыру заңы.

$$A \cup \overline{A} = U; \quad A \cap \overline{A} = \emptyset$$

Жиындарға қолданылатын операциялардың қасиеттерінің дұрыстығына бірнеше тәсілдермен көз жеткізуге болады:

1. Нақтылы жиындар мен амалдарды орындау арқылы (екі жағынан бірдей нәтиже шығады);

2. Венн диаграммасын сызу арқылы;

3. Амалдардың анықтамасын пайдалану арқылы.

$\cap$ операциясының **ассоциативтігін** дәлелдейік:

Дәлелдеуі: Ассоциативті заңды дәлелдеу $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ (Теру заңы);

$A = \{a, b\}$; $B = \{a, c, d\}$; $C = \{b, c, d, e\}$ болсын.

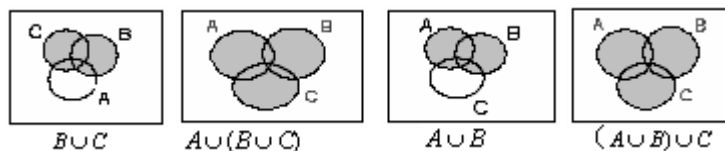
1-тәсіл. Амалдарды орындайық. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$;

Сол жағы: $\{a, b\} \cup \{a, b, c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$;

Оң жағы: $(\{a, b\} \cup \{a, c, d\}) \cap \{b, c, d, e\} = \{a, b, c, d\} \cap \{b, c, d, e\} = \{b, c, d, e\}$; Демек

жиындар тең.

2-тәсіл. Диаграммасын салайық:



Диаграммаларының бірдейлігінен жиындар тең деген қорытындыға келеміз.

3-тәсіл.

$$a) x \in A \cup (B \cup C) \Rightarrow x \in A \vee x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \vee x \in B \vee x \in C \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$; Бұдан $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$. Енді екінші жағынан,

$$б) x \in (A \cup B) \cup C \Rightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C \Rightarrow x \in A \vee x \in B \vee x \in C \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$ демек, $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$; Яғни,

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Жабу және бөліктеу

Айталық, $\{A_i \mid i \in I\}$ A жиынының бос емес ішкі жиындары болсын. $A_i \subset A$

Анықтама. Егер $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ болса, яғни A жиынының әр элементі A_i жиындарының

ең болмаса біреуіне кірсе, онда бос емес $\{A_i \mid i \in I\}$ жиыны A жиынының жабуы деп, ал егер $i \neq j$ болғанда $A_i \cap A_j = \emptyset$ болса, жабу бөліктеу деп аталады ($\forall I, j \in I \ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$). Басқа сөзбен айтқанда A жиынының бос емес $\{A_i \mid i \in I\}$ ішкі жиындары қиылыспаса яғни A -ның әр элементі бос емес A_i жиындарының тек біреуіне ғана кіретін болса, онда $\{A_i \mid i \in I\}$ жиыны A жиынының бөліктеуі деп аталады.

Мысалы, $A = \{1, 2, 3\}$ болса, онда $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$ – A жиынын жабады, ал $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ – A жиынының бөліктеуі болады.