

3-ДӘРІС. КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР

Комплекс сандарды тіктөртбұрышты координаталар жүйесінде берілген жазықтықтағы нүктелер жиыны арқылы кескіндеуге болады. Комплекс сандардан құрылған E жиынын алып, $z = x + iy$ комплекс сан осы E жиынының әрбір санымен теңбе-тең болсын. Бұл жағдайда z комплекс айнымалы, ал E оның өзгеру облысы.

Анықтама. Егер тәуелсіз комплекс айнымалы z қабылдайтын әрбір мәніне, яғни E жиынының әрбір санына, белгілі бір комплекс сандық мән $w = u + iv$ сәйкес келсе, w тәуелсіз айнымалы z функциясы деп атайды да $w = f(z)$ белгілейді.

Аргумент $z = x + iy$ комплекс сан болғандықтан функцияның мәні де $w = f(z)$ комплекс сан, яғни $w = u(x, y) + iv(x, y)$, $(x, y \in E)$ түрде қарастырамыз, мұндағы $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ функциялар x пен y тен тәуелді нақты функциялар. Егер аргументтің әр түрлі $z_1 \neq z_2 \in E$ мәндеріне $w = f(z)$ -тің әр түрлі мәндері $f(z_1) = w_1 \neq w_2 = f(z_2)$ сәйкес келсе, онда $w = f(z)$ функциясын бірімәнді немесе бірпарақты функция деп атайды.

Мысал. $f(z) = \frac{z+3}{z+5}$. функцияның нақты және жорамал бөліктерін жекешелеу керек

Шешуі. Айталық $z = x + iy$; $f(z) = u + iv$, осыдан

$$u + iv = \frac{x+3+iy}{x+5+iy} = \frac{(x+3+iy)(x+5-iy)}{(x+5)^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 + 8x + 15}{x^2 + y^2 + 10x + 25} + i \frac{2y}{x^2 + y^2 + 10x + 25}.$$

$$u = \frac{x^2 + y^2 + 8x + 15}{x^2 + y^2 + 10x + 25}; \quad v = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 10x + 25}. \quad \blacktriangle$$

Дифференциалданатын және аналитикалық функция

Анықтама. Егер $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ шек тиянақты болса, онда оны $w = f(z)$

функциясының z нүктесіндегі туындысы деп айтады да, $f'(z) = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ белгілейді. Бұл шек Δz -тің нөлге қалай ұмтылу тәсілінен тәуелсіз.

Егер $w = f(z)$ функциясының D облысының кез келген нүктесінде үзіліссіз туындысы бар болса, онда оны осы облыста аналитикалық функция деп атайды. Функцияны нүктеде аналитикалық дейді, егер ол функция осы нүктенің қайсы бір аймағында аналитикалық болса.

Дифференциалданатын функцияның дербес туындылары $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ бар

болады және Коши-Риман теңдіктері орынды

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Бұл теңдіктер Коши-Риман шарттары деп аталады. $z_0 = x_0 + iy_0$ нүктесінде Коши-Риман шарттары орындалғанда $f'(z)$ туындысын мына формулалардың біреуімен анықтауға болады:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1)$$

Конформды бейнелеу

Анықтама. Егер $w = f(z)$ пен бейнелегенде қисықтардың арасындағы бұрыштарының шамасы сақталынып және созылу (сығылу) коэффициенттері тұрақты болса, онда $w = f(z)$ бейнеленуін конформды бейнелеу деп атайды.

Бұл термин латын сөзі “конформды”, яғни “формасының консерватизмі” дегенге орай қолданылады.

Анықтама. Шектеулі D облысында $w = f(z)$ функциясы дифференциалданатын, бірпарақты, осы облыста туындысы нолден айырықша болса, онда D облысында $w = f(z)$ конформды бейнелеу болады.

Теорема (Риман теоремасы). Егер бірбайланысты D облысының шекарасы ең кемінде екі нүктеден тұратын болса, онда ол облыста бірпарақты және конформды бейнелейтін $w = f(z)$ аналитикалық функция табылады.

Конформды бейнелеу теориясының негізгі принциптері.

Облыстың сақталу принципі. Бірбайланысты облыста берілген аналитикалық функция $w = f(z)$ арқылы бейнелегенде облыс облысқа көшеді.

Функцияның бар болу принципі. Егер комплекс жазықтықтағы бірбайланысты D және G облыстарының шекаралары ең кемінде екі нүктеден тұратын болса, онда ол D облысын G облысына сансыз көп тәсілмен бейнелейтін $w = f(z)$ аналитикалық функциясы табылады.

Берілген D облысын G облысына түрлендіретін сансыз көп аналитикалық функциялардың арасынан бір ғана аналитикалық функцияны табу үшін бір-біріне эквивалентті келесі нормаландыру шарттардың біреуі орындалу керек:

1. Изделініп отырған $w = f(z)$ функциясы үшін $f(z_0) = w_0$, $\arg f'(z_0) = \alpha$ теңдіктері орындалу керек;
2. Бейнелейтін D облысының көрсетілген z_0 нүктесі мен оның L шекарасының z_1 нүктесі бейнеленген G облысының көрсетілген ішкі w_0 нүктесі мен мұнын Γ шекарасының w_1 нүктесіне бейнеленуі керек, яғни

$$f(z)|_{z=z_0 \in D} = f(z_0) = w_0 \in G \quad f(z)|_{z=z_1 \in L} = f(z_1) = w_1 \in \Gamma;$$

3. D облысының облысты айналып шығу бағытымен алынған L шекарасының әр түрлі үш z_1, z_2, z_3 нүктелері G облысындағы Γ шекарасының әр түрлі w_1, w_2, w_3 нүктелеріне көшү керек, яғни

$$f(z) \Big|_{z=z_k \in L} = f(z_k) = w_k \in \Gamma, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Шекараның сәйкестік принципі. Бірбайланысты D облысында берілген бірпарақты және аналитикалық функция $w = f(z)$ осы облыстың L контурында үзіліссіз болса, онда бұл функция D облысының L контурын G облысының Γ контурына бейнелейді және облысты айналып шығу бағыты өзгермейді.

Симметрия принципі. Аналитикалық функция $w = f(z)$ арқылы бейнелегенде D облысының шекарасы L бойынша симметриялы нүктелер бейнеленген G облысының шекарасы Γ бойынша симметриялы нүктелерге көшеді.